

# $1/r^2$ 型相互作用模型の周辺

東京大学 数理科学研究科 笥 三郎

E-mail: kakei@poisson.ms.u-tokyo.ac.jp

## 1 はじめに

相互作用のある量子多体問題を考える際には、通常は平均場近似等のなんらかの近似を導入せざるを得ない。しかし、ある種の一次元系においては、その波動関数・相関関数等を具体的に書き下ろしてその性質を調べることが可能である。本論説では、そのような「量子可積分系」の一つのクラスである、Calogero-Sutherland 模型についての入門的な解説をその目的としたい。量子力学の教科書レベルの復習から始めて、具体的な計算もなるべく省略せずに書いたので、かなり冗長になった感も否めないがお許し願いたい。この種の問題に関するレビューは、日本語のものも既に幾つかあるので、より発展的な事柄はそれらを参照して頂きたい [1-6]。

さて、本論説で「Calogero-Sutherland 模型」と呼ぶのは、次のようなハミルトニアンを持つ量子 1 次元模型である：

Sutherland 模型

$$H_S = -\sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial \theta_j^2} + \frac{1}{2} \sum_{j < k} \frac{\beta(\beta-1)}{\sin^2[(\theta_j - \theta_k)/2]}, \quad (1)$$

Calogero 模型

$$H_C = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left( -\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + x_j^2 \right) + \sum_{j < k} \frac{\beta(\beta-1)}{(x_j - x_k)^2}. \quad (2)$$

これらのハミルトニアンは、Calogero と Sutherland によって導入された [7, 8]。本稿では上のように「Calogero 模型」、「Sutherland 模型」と呼ぶことにするが、それぞれは「Rational Calogero-Sutherland model」、「Trigonometric Calogero-Sutherland model」などと呼ばれることもある。どう呼ぶのが妥当なのかはさておき、とりあえず本稿では上のように名付けておく。

研究会の際には、時間の都合で Calogero 模型に関しては簡単な紹介しかできなかった。本稿では、Calogero 模型に関して筆者が得た結果（直交基底の演算子表示）について、やや詳しく述べてみたい。

どのような問題を考えようとしているかをはっきりさせるために、次節では、まず相互作用の無い系から出発しよう。

## 2 粒子間相互作用の無い多体系

Calogero-Sutherland 模型に特徴的なことは、その固有値の分布の様子が自由粒子、すなわち  $\beta = 0$  の場合とほとんど同じ構造を持つことである。このことを見るために、以下ではまず解ける模型の簡単な例として粒子間相互作用の無い場合の復習から始めることにする。

### 2.1 簡単な例 1：単位円上の自由粒子

まず単位円上の自由粒子を考えて、量子力学の復習をしておく。量子力学によると、この系の運動量・エネルギーは、2つの演算子

$$\hat{P} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

の固有値問題を、周期的境界条件  $\psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta)$  の下で解くことによって得られる。この場合、同時固有関数は  $\psi(\theta) = \exp(ik\theta/\hbar)$  (規格化定数は無視した) で与えられる。ここで、波動関数の 1 価性の要請から、 $k/\hbar$  の値は整数に限られる。このとき固有値はそれぞれ

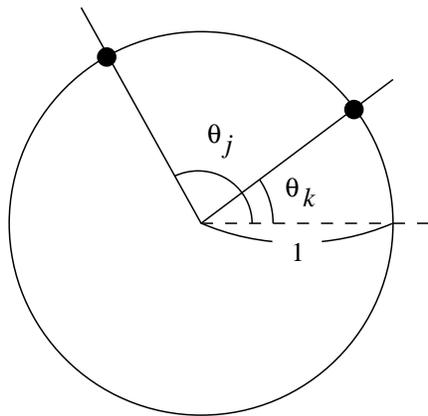
$$\hat{P}\psi(\theta) = k\psi(\theta), \quad \hat{H}\psi(\theta) = \frac{k^2}{2m}\psi(\theta)$$

で与えられる。さらに、 $x = \exp(i\theta/\hbar)$  と書き直すと、

$$\hat{P} = x \frac{d}{dx}, \quad \hat{H} = \frac{1}{2m} \left(x \frac{d}{dx}\right)^2$$

であり、固有関数は  $\psi(x) = x^k$  ( $k$  は整数) という形になる。

次に、単位円上に  $N$  個の自由粒子が乗っている系を考えよう。この系の性質は、



$$\text{全運動量演算子} \quad \hat{P} = \sum_{j=1}^N \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta_j}, \quad (3)$$

$$\text{ハミルトニアン} \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial \theta_j^2} \quad (4)$$

の同時固有関数を求めることで理解できるはずである(この場合も, 系が並進対称性を持つので, ハミルトニアンと運動量とは可換である).  $N$  粒子系でも  $x_j = \exp(i\theta_j/\hbar)$  としてみると,

$$\hat{P} = \sum_{j=1}^N x_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \hat{H} = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^N \left( x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2$$

となり, 同時固有関数は  $x_j$  の斉  $n$  次式であることが分かる. より具体的に, 分割  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$  に対する単項式

$$x^\lambda = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_N^{\lambda_N}$$

に作用させてみると,

$$\begin{aligned} \hat{P}x^\lambda &= \left( \sum_{j=1}^N \lambda_j \right) x^\lambda &\Rightarrow \text{全運動量} &= \sum_{j=1}^N \lambda_j \\ \hat{H}x^\lambda &= \frac{1}{2m} \left( \sum_{j=1}^N \lambda_j^2 \right) x^\lambda &\Rightarrow \text{全エネルギー} &= \frac{1}{2m} \left( \sum_{j=1}^N \lambda_j^2 \right) \end{aligned}$$

以下では Boson 系の波動関数, すなわち対称関数の空間を考えると, 内積

$$\begin{aligned} (f, g) &= \oint f(x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_N^{-1}) g(x_1, x_2, \dots, x_N) \prod_{j=1}^N \frac{dx_j}{2\pi i x_j} \\ &= f(x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_N^{-1}) g(x_1, x_2, \dots, x_N) \text{ の定数項} \end{aligned}$$

に対する直交基底は, 以下で定義する  $m_\lambda(x)$  (monomial symmetric functions) で与えられる.

monomial symmetric functions  $m_\lambda(x)$  の定義

長さが  $N$  以下の分割  $\lambda$

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N), \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_N (\geq 0)$$

に対して,  $m_\lambda$  は

$$\begin{aligned} m_\lambda &= \sum_{w \in S_N / S_N^\lambda} w(x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_N^{\lambda_N}) \\ &= \frac{1}{\#(S_N^\lambda)} \sum_{w \in S_N} w(x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_N^{\lambda_N}) \end{aligned}$$

で定義される. ここで,  $S_N^\lambda = \{w \in S_N : w\lambda = \lambda\}$  は単項式  $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_N^{\lambda_N}$  を変えない  $S_N$  の部分群を表す.

$m_\lambda$  の具体例をいくつか挙げておこう.

$$m_2 = \sum_j x_j^2$$

$$m_{11} = \sum_{i < j} x_i x_j = \frac{1}{2} \sum'_{i,j} x_i x_j$$

(  $\sum'$  は条件  $i \neq j$  を意味する. 以下でも同様. )

$$m_{321} = \sum'_{i,j,k} x_i^3 x_j^2 x_k$$

$$m_{311} = \sum_{\substack{i \neq j,k \\ j < k}} x_i^3 x_j x_k = \frac{1}{2} \sum'_{i,j,k} x_i^3 x_j x_k$$

$$m_{222} = \sum_{i < j < k} x_i^2 x_j^2 x_k^2 = \frac{1}{3!} \sum'_{i,j,k} x_i^2 x_j^2 x_k^2$$

## 2.2 簡単な例 2 : 調和振動子

今度は調和振動子を考えよう. 適当にスケールして, ハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2} \left( -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \right)$$

の固有関数を, 境界条件「 $|x| \rightarrow \infty$  で  $|\psi| \rightarrow 0$ 」の下で調べる.

この系を調べるには, 次の生成・消滅演算子を導入するとよい.

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{d}{dx} + x \right), \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{d}{dx} + x \right)$$

これらを用いると, ハミルトニアンは,

$$H = \frac{1}{2} (a^\dagger a + a a^\dagger) = a^\dagger a + \frac{1}{2}$$

と表される. これらの作用素の交換関係を計算しておこう.

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [H, a^\dagger] = a^\dagger, \quad [H, a] = -a$$

このとき,

$$H\psi = \epsilon\psi \Rightarrow H(a^\dagger\psi) = (a^\dagger H + a^\dagger)\psi = (\epsilon + 1)(a^\dagger\psi)$$

$$H(a\psi) = (aH - a)\psi = (\epsilon - 1)(a\psi)$$

であるから,  $a^\dagger$  は  $H$  の固有値を 1 上げ,  $a$  は 1 下げることが分かる.

基底状態の波動関数は  $\psi_0 \propto \exp(-x^2/2)$  (規格化定数は省略) で与えられるが, これは「消滅演算子」によって消される; すなわち  $a\psi_0 = 0$ . 励起状態の波動関数を得るには, 今求めた基底状態の波動関数に, 生成演算子  $a^\dagger$  を作用させていけばよい.

$$\epsilon = \frac{1}{2} : \psi_0(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\epsilon = \frac{3}{2} : \psi_1(x) = a^\dagger\psi_0(x) = f_1(x)\psi_0(x)$$

$$\begin{aligned} \epsilon = \frac{5}{2} & : \psi_2(x) = (a^\dagger)^2 \psi_0(x) = f_2(x) \psi_0(x) \\ & \dots\dots\dots \\ \epsilon = n + \frac{1}{2} & : \psi_n(x) = (a^\dagger)^n \psi_0(x) = f_n(x) \psi_0(x) \end{aligned}$$

ここで,  $f_n(x)$  は  $n$  次多項式である.

この  $f_n(x)$  の満たす微分方程式を導こう.

$$\begin{aligned} H\psi_n &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \psi_n(x) \\ \Rightarrow H(\psi_0(x)f_n(x)) &= \left(n + \frac{1}{2}\right) (\psi_0(x)f_n(x)) \\ \Rightarrow (\psi_0^{-1} \circ H \circ \psi_0)f_n &= \left(n + \frac{1}{2}\right) f_n \end{aligned}$$

ここで,  $\circ$  は演算子としての積  $\frac{d}{dx} \circ x = 1 + x \circ \frac{d}{dx}$  を意味する.  $\psi_0(x)$  の寄与を取り除いたハミルトニアン  $\widehat{H}$  をつぎのように導入しよう:

$$\begin{aligned} \widehat{H} &= \psi_0^{-1} \circ H \circ \psi_0 \\ &= \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \circ \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right) \circ \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx} + 1\right) \end{aligned}$$

よって,  $f_n(x)$  の満たす微分方程式は,

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + 2n\right) f_n(x) = 0$$

である. これは, (よく知られているように) Hermite の微分方程式である. また, 生成・消滅演算子から  $\psi_0(x)$  の寄与を取り除いたもの, すなわち

$$\psi_0^{-1} \circ a^\dagger \circ \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{dx} + x\right), \quad \psi_0^{-1} \circ a \circ \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{dx}$$

は, Hermite 多項式に対する昇降演算子そのものである.

次に,  $N$  個の調和振動子系を考えよう.

$$\begin{aligned} H &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + x_j^2\right) \\ &= \sum_{j=1}^N \left(a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2}\right) = \sum_{j=1}^N a_j^\dagger a_j + \frac{N}{2} \end{aligned}$$

基底状態は,

$$\psi_0(x) \propto \prod_{j=1}^N \exp\left(-\frac{x_j^2}{2}\right)$$

で与えられる.

以下では, ボゾン系を考えることにする.

$$\begin{aligned} \text{励起状態} &= (x_1, x_2, \dots, x_N \text{の対称多項式})\psi_0 \\ &= (a_1^\dagger, a_2^\dagger, \dots, a_N^\dagger \text{の対称多項式})\psi_0 \end{aligned}$$

この場合は, 固有空間は縮退している. 例えば, 対称多項式の基底として, monomial symmetric functions をとって考えてみよう:

$$\widehat{m}_\lambda^\dagger = m_\lambda(a_j^\dagger), \quad \widehat{m}_\lambda = m_\lambda(a_j)$$

とすると,

$$\begin{aligned} [H, \widehat{m}_\lambda^\dagger] &= |\lambda| \widehat{m}_\lambda^\dagger &: H \text{の固有値を } |\lambda| = \sum_j \lambda_j \text{ だけ上げる} \\ [H, \widehat{m}_\lambda] &= -|\lambda| \widehat{m}_\lambda &: H \text{の固有値を } |\lambda| \text{ だけ下げる} \end{aligned} \quad (5)$$

よって, 固有空間の縮退の様子は, 次の図のようになっていることが分かる.

$\epsilon = \frac{N}{2}$	$\psi_0$	次元 = 1
$\epsilon = 1 + \frac{N}{2}$	$\widehat{m}_1^\dagger \psi_0$	次元 = 1
$\epsilon = 2 + \frac{N}{2}$	$\widehat{m}_2^\dagger \psi_0 \quad \widehat{m}_{11}^\dagger \psi_0$	次元 = 2
$\epsilon = 3 + \frac{N}{2}$	$\widehat{m}_3^\dagger \psi_0 \quad \widehat{m}_{21}^\dagger \psi_0 \quad \widehat{m}_{111}^\dagger \psi_0$	次元 = 3
$\epsilon = 4 + \frac{N}{2}$	$\widehat{m}_4^\dagger \psi_0 \quad \widehat{m}_{31}^\dagger \psi_0 \quad \widehat{m}_{22}^\dagger \psi_0 \quad \widehat{m}_{211}^\dagger \psi_0 \quad \widehat{m}_{1111}^\dagger \psi_0$	次元 = 5
...	.....	...

図 1:  $N$  次元調和振動子の固有空間の縮退の様子

このとき, エネルギーが  $\epsilon = n + N/2$  である部分空間の次元は  $n$  の分割数に等しい. また今の場合, 内積

$$\begin{aligned} &\langle 0|f(a_1, a_2, \dots, a_N)g(a_1^\dagger, a_2^\dagger, \dots, a_N^\dagger)|0\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f(a_1^\dagger, a_2^\dagger, \dots, a_N^\dagger)\psi_0(x) \right\} \left\{ g(a_1^\dagger, a_2^\dagger, \dots, a_N^\dagger)\psi_0(x) \right\} \prod_{j=1}^N dx_j \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x) \left\{ f(a_1, a_2, \dots, a_N)g(a_1^\dagger, a_2^\dagger, \dots, a_N^\dagger)\psi_0(x) \right\} \prod_{j=1}^N dx_j \end{aligned}$$

を考えると,  $\langle 0|a_i^m(a_j^\dagger)^n|0\rangle \propto \delta_{ij}\delta_{mn}$  が成り立つので, この内積に関する直交基底は monomial symmetric functions を使って,

$$m_\lambda(a_1^\dagger, a_2^\dagger, \dots, a_N^\dagger)\psi_0(x)$$

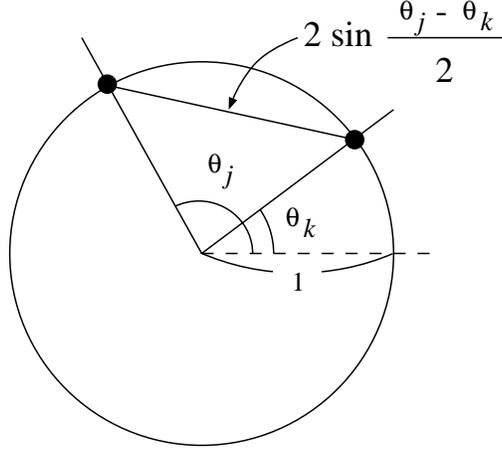
で与えられる.

### 3 Sutherland 模型

前節では、粒子間相互作用のない多体系を扱った。次に、粒子間相互作用があり、しかも厳密に扱うことのできる系として、まずは Sutherland 模型を見ていこう。

#### 3.1 Sutherland 模型と Jack 多項式

Sutherland 模型とは、単位円周上の粒子が、“cord distance”  $2 \sin [|\theta_j - \theta_k|/2]$  の 2 乗に比例するポテンシャルを通して相互作用している模型である [7]。



$$\text{全運動量演算子 } P_S = \sum_{j=1}^N \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \theta_j},$$

$$\text{ハミルトニアン } H_S = -\sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial \theta_j^2} + \frac{1}{2} \sum_{j < k} \frac{\beta(\beta - 1)}{\sin^2 [(\theta_j - \theta_k)/2]}.$$

ここで  $x_j = \exp(i\theta_j)$  とおけば、

$$P_S = \sum_{j=1}^N x_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

$$H_S = \sum_{j=1}^N \left( x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 - \beta(\beta - 1) \sum_{j < k} \frac{2x_j x_k}{(x_j - x_k)^2}.$$

と書き直される。この場合も調和振動子の場合と同様に、 $H_S$  を一階の作用素の積で表すことができる：

$$H_S = \sum_{j=1}^N b_j^\dagger b_j + E_0, \quad E_0 = \frac{\beta^2}{12} N(N^2 - 1) \quad (\text{基底状態のエネルギー})$$

$$b_j^\dagger = x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\beta}{2} \sum_{k(\neq j)} \frac{x_j + x_k}{x_j - x_k}, \quad b_j = x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\beta}{2} \sum_{k(\neq j)} \frac{x_j + x_k}{x_j - x_k}.$$

基底状態の波動関数  $\psi_S^{(0)}$  は

$$b_j \psi_0^{(S)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_0^{(S)} = \prod_{j < k} |x_j - x_k|^\beta \prod_{j=1}^N x_j^{-\beta(N-1)/2}.$$

で与えられることが分かる. しかし, 今の場合は  $[H_S, b_j^\dagger] \neq b_j^\dagger$  であるので,  $\sum_j (b_j^\dagger)^n \psi_0^{(S)}$  としても励起状態は作ることができない. そこで, 波動関数に対する微分方程式を直接扱うことを考えてみよう.

励起状態の波動関数を次の形で探してみる:

$$J(x) \psi_0^{(S)}(x); \quad J(x) \text{ は } x_1, \dots, x_N \text{ の対称多項式}$$

(ここで負巾を考えないで良い理由については Appendix 1 を参照).  $H_S$  から  $\psi_0^{(S)}$  の寄与を取り除くと,

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_S &= (\psi_0^{(S)})^{-1} \circ H_S \circ \psi_0^{(S)} - E_0 \\ &= \dots \\ &= \sum_{j=1}^N \left( x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 + \beta \sum_{j < k} \frac{x_j + x_k}{x_j - x_k} \left( x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

結局, この  $\widetilde{H}_S$  に関する固有値問題  $\widetilde{H}_S J(x) = \epsilon J(x)$  を,  $J(x)$  が  $x_1, \dots, x_N$  の対称多項式であるという条件の下で解けばよいことになった.

Sutherland に従い, 対称多項式の空間の基底として monomial symmetric functions  $m_\lambda(x)$  を選び,  $\widetilde{H}_S$  を  $m_\lambda(x)$  に作用させてみよう. 具体的に計算すると,

2次  $m_2, m_{11}$

$$\widetilde{H}_S \begin{pmatrix} m_2 \\ m_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 2\beta(N-1) & 4\beta \\ 0 & 2 + \beta(N-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2 \\ m_{11} \end{pmatrix}$$

3次  $m_3, m_{21}, m_{111}$

$$\widetilde{H}_S \begin{pmatrix} m_3 \\ m_{21} \\ m_{111} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 + 3\beta(N-1) & 6\beta & 0 \\ 0 & 5 + \beta(3N-5) & 12\beta \\ 0 & 0 & 3 + 3\beta(N-3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_3 \\ m_{21} \\ m_{111} \end{pmatrix}$$

n次  $m_n, \dots, m_{1^n}$

$$\widetilde{H}_S \begin{pmatrix} m_n \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{1^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_n \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{1^n} \end{pmatrix}$$

各次数において、うまく基底を並べれば出てくる係数行列は必ず上三角になるので、容易に対角化できる。また、固有値は上三角行列の対角成分そのもので与えられる。基底を並べる際には、“*dominance order*” と呼ばれる半順序と矛盾しない全順序 (例えば辞書式順序) を用いる [9, 10].

*dominance order*

$$\lambda \leq \mu \Leftrightarrow |\lambda| = |\mu| \text{ かつ, 全ての } k \text{ に対して} \\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_k \leq \mu_1 + \cdots + \mu_k$$

この順序は、 $|\lambda| \geq 6$  の  $\lambda$  に対しては全順序とはならないことを注意しておく。このように順序を定義しておく、 $\widetilde{H}_S$  を  $m_\lambda(x)$  に作用させた際にはこの順序の意味でより「低い」項しか出てこない。

以下では、次の意味で  $<_D$  という記号を用いることにする:

$$\lambda <_D \mu \Leftrightarrow \lambda \neq \mu \text{ かつ } \lambda \leq \mu$$

これを用いると、固有関数としての Jack 多項式の定義が得られる。

固有関数としての Jack 多項式の定義

Jack 多項式  $J_\lambda(x)$  とは、 $\widetilde{H}_S$  の固有関数のうち、次のような展開形をもつものである:

$$J_\lambda(x) = m_\lambda(x) + \sum_{\mu(<_D \lambda)} u_{\lambda\mu} m_\mu(x)$$

$\widetilde{H}_S$  の固有値は、上で計算した上三角行列の対角成分で与えられる。

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_S J_\lambda(x) &= \epsilon_\lambda J_\lambda(x), \\ \epsilon_\lambda &= \sum_j \left\{ \lambda_j^2 + \beta(N+1-2j)\lambda_j \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、「擬運動量」  $k_j$  を

$$k_j = \lambda_j + \beta \left( \frac{N+1}{2} - j \right)$$

と定めると、励起状態の全運動量、エネルギーは、それぞれ

$$\text{全運動量} = \sum_j k_j, \quad \text{全エネルギー} = E_0 + \epsilon_\lambda = \sum_j k_j^2$$

と、自由な粒子系と同様の表式を得る。ただし、今の場合  $k_j$  には選択則  $k_j - k_{j+1} \geq \beta$  が存在する。 $\beta = 0$  なら通常の Boson,  $\beta = 1$  なら (通常の排他律に従う) Fermion であるが、一般の  $\beta$  ではそのどちらでもない。このような「一般化された排他律」に従う粒子は “g-on” と呼ばれることもあり、物理的な観点から注目されている [4].

今の場合、固有値には縮退がある。例えば  $|\lambda| = 6$  では、

- (3, 3) と (4, 1, 1)

$$\begin{aligned}
\epsilon_{33} &= 3^2 + 3^2 + \beta \{3(N-1) + 3(N-3)\} \\
&= 18 + \beta(6N-12) \\
\epsilon_{411} &= 4^2 + 1^2 + 1^2 + \beta \{4(N-1) + (N-3) + (N-5)\} \\
&= 18 + \beta(6N-12)
\end{aligned}$$

よって  $\epsilon_{33} = \epsilon_{411}$

- (2, 2, 2) と (3, 1, 1, 1)

$$\begin{aligned}
\epsilon_{222} &= 2^2 + 2^2 + 2^2 + \beta \{2(N-1) + 2(N-3) + 2(N-5)\} \\
&= 12 + \beta(6N-18) \\
\epsilon_{3111} &= 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + \beta \{3(N-1) + (N-3) + (N-5) + (N-7)\} \\
&= 12 + \beta(6N-18)
\end{aligned}$$

よって  $\epsilon_{222} = \epsilon_{3111}$

$\widetilde{H}_S$  はもともと物理系のハミルトニアンからきているので、もちろん内積

$$\begin{aligned}
(f, g)_S &= \oint f(x_1^{-1}, \dots, x_N^{-1}) g(x_1, \dots, x_N) \psi_0^{(S)}(x^{-1}) \psi_0^{(S)}(x) \prod_{j=1}^N \frac{dx_j}{2\pi i x_j} \quad (8) \\
&= f(x_1^{-1}, \dots, x_N^{-1}) g(x_1, \dots, x_N) \psi_0^{(S)}(x^{-1}) \psi_0^{(S)}(x) \text{ の定数項}
\end{aligned}$$

に関して自己共役である。しかし、 $\widetilde{H}_S$  の固有値の縮退のため、得られた固有関数、すなわち Jack 多項式が上の内積に関して互いに直交しているかどうかはここまでの議論では分からない。しかし、実際にはこの内積に関して直交しているのである。さらに、以下に述べる「組合せ論的な内積」に対しても直交している。

組合せ論的な内積

$p_n = \sum_j x_j^n$  (power-sum symmetric functions) に対して、

$$\langle p_m, p_n \rangle_S = m\beta^{-1} \delta_{m,n}$$

とする。一般の  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  に対しては、 $p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} p_{\lambda_3} \cdots$  として、

$$\begin{aligned}
\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_S &= \text{per} \left( \langle p_{\lambda_i}, p_{\mu_j} \rangle_S \right)_{i,j=1,\dots,N} \quad (\text{パーマメント}) \\
&= \sum_{w \in S_N} \langle p_{\lambda_{w(1)}} p_{\mu_1} \rangle_S \langle p_{\lambda_{w(2)}} p_{\mu_2} \rangle_S \cdots \langle p_{\lambda_{w(N)}} p_{\mu_N} \rangle_S \\
&= \delta_{\lambda\mu} z_\lambda \beta^{-l(\lambda)}
\end{aligned}$$

ただし,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$  に対して,  $l(\lambda) = \#\{\lambda_j | \lambda_j \neq 0\}$  と定める. また,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) = (1^{n_1}, 2^{n_2}, 3^{n_3}, \dots, N^{n_N})$  と表されるとき,

$$z_\lambda = 1^{n_1} n_1! \cdot 2^{n_2} n_2! \cdot 3^{n_3} n_3! \cdots N^{n_N} n_N!$$

である.

Jack 多項式がこれら 2 つの内積  $(\cdot, \cdot)_S, \langle \cdot, \cdot \rangle_S$  に関して直交することの証明は 4 節で扱う.

以上の内積を用いて, 次のように Jack 多項式を定義することもできる:

#### 直交多項式としての Jack 多項式の定義

1.  $J_\lambda(x) = m_\lambda(x) + \sum_{\mu(<\lambda)} u_{\lambda\mu} m_\mu(x)$ ,
2.  $(J_\lambda, J_\mu)_S \propto \delta_{\lambda\mu}$  (または  $\langle J_\lambda, J_\mu \rangle_S \propto \delta_{\lambda\mu}$ )

### 3.2 Dunkl 作用素と Sutherland 模型の可積分性

古典力学系の場合, 「可積分性」とは自由度の数だけの保存量が存在することであった. これに対応して, 量子系の場合の「可積分性」とはハミルトニアンと可換な作用素が存在することを意味し, そのような可換作用素を「保存量」と呼ぶ.

Sutherland 模型に対する保存量の構成法はいくつかあるが, ここでは次のような “Dunkl operator” を用いた方法を紹介する [12, 13, 14].

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - \beta \sum_{k(\neq j)} \frac{1}{x_j - x_k} (s_{jk} - 1) \quad (j = 1, \dots, N). \quad (9)$$

ここで  $s_{ij}$  は対称群  $S_N$  の元であり,  $x_1, \dots, x_N$  の関数に「文字の入れ換え」として作用する ( $x_i$  と  $x_j$  とを入れ換える). 以下では,  $x_j, D_j, s_{jk}$  によって生成される代数を  $\mathcal{A}_S$  と表すことにする. 生成元の間の変換関係は,

$$\begin{aligned} [D_i, D_j] &= [x_i, x_j] = 0, \\ s_{ij}x_j &= x_i s_{ij}, \quad s_{ij}x_k = x_k s_{ij} \quad (k \neq i, j), \\ s_{ij}D_j &= D_i s_{ij}, \quad s_{ij}D_k = D_k s_{ij} \quad (k \neq i, j), \\ [D_i, x_j] &= \delta_{ij} \left( 1 + \beta \sum_{k(\neq i)} s_{ik} \right) - (1 - \delta_{ij}) \beta s_{ij}. \end{aligned} \quad (10)$$

この  $D_j$  を用いて,

$$\pi_j = x_j D_j = x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \beta \sum_{k(\neq j)} \frac{x_j}{x_j - x_k} (s_{jk} - 1) \quad (j = 1, \dots, N).$$

と定義すると,  $\pi_j$  はもはや可換ではない:

$$[\pi_i, \pi_j] = -\beta(\pi_i - \pi_j) s_{ij}$$

しかし, この  $\pi_j$  を用いて, 互いに可換な微分作用素の族を作ることができる:

$$I_n = \text{Res} \left( \sum_{j=1}^N \pi_j^n \right) \implies [I_m, I_n] = 0.$$

ここで, “Restriction”  $\text{Res } X$  は,  $X$  の作用を対称多項式の空間の上に制限したということの意味している.

#### Res (Restriction) の定義

「座標の入れ換え」 $s_{ij}$  を含んだ有理関数係数の微分演算子は,  $S_n$  の元を右に持っていくように並べ変えることで,

$$D = \sum_{w \in S_n} D_w w \quad (D_w \text{ は } n \text{ 変数の有理関数係数の微分演算子})$$

と, 一意的に表すことができる. この  $D$  に対して,  $\text{Res } D$  を次のように定義する;

$$\text{Res } D = \text{Res} \left( \sum_{w \in S_n} D_w w \right) = \sum_{w \in S_n} D_w$$

すなわち,  $D$  の作用を対称多項式の空間の上に制限したということにあたる.

このとき, Sutherland 模型の運動量とハミルトニアンは,

$$P_S = \text{Res}(I_1), \quad H_S = \text{Res}(I_2)$$

として得られる.

ここで用いた微分差分演算子 (9) は, Dunkl によって 1989 に導入された [12]. 一方, 物理サイドでは同じ演算子が Polychronakos [13], 及び Brink ら [14] によって考案され, 一次元量子系を解析するのに用いられた. 例によって, 数学と物理とで同一の問題を独立に扱っていたというわけである.

## 4 Jack 多項式の直交性

3.1 節で述べたように  $\widetilde{H}_S$  の固有値には縮退があるので, Jack 多項式が  $\widetilde{H}_S$  の固有関数になっていることだけでは直交性が示されない. 本節では, Jack 多項式が内積 (8) に関して直交していることの証明を 2 通り述べる.

### 4.1 Ruijsenaars 模型 (相対論的 Sutherland 模型) と Macdonald 多項式

この節では, Sutherland 模型の  $q$ -差分 analogue である Ruijsenaars 模型, 及びその波動関数として現れる Macdonald 多項式について述べる. ここでは基本的な定義しか述べないが, より進んだ事柄については本講究録の白石・野海・三町三氏の論節を参照して頂きたい.

さて, S.N.M. Ruijsenaars は [15] において, 次のような「相対論的 Sutherland 模型」を提出した.

$$H_R = \frac{c^2}{2}(S_1 + S_{-1}),$$

$$S_{\pm 1} = \sum_{j=1}^N \prod_{k(\neq j)} \left( \frac{\sin [(z_j - z_k \mp i\beta/c)/2]}{\sin [(z_j - z_k)/2]} \right)^{1/2}$$

$$\times \exp \left( \pm \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial z_j} \right) \prod_{k(\neq j)} \left( \frac{\sin [(z_j - z_k \pm i\beta/c)/2]}{\sin [(z_j - z_k)/2]} \right)^{1/2}$$

この模型が「相対論的」であるという意味は, この模型が Poincaré 代数の対称性を持っているということである. 実際, 上の  $H_R$  に加えて

$$P_R = \frac{c}{2}(S_1 - S_{-1}), \quad B_R = -\frac{1}{c} \sum_{j=1}^N z_j$$

とおけば,  $H_R, P_R, B_R$  は次の交換関係に従う.

$$[H_R, P_R] = 0, \quad [H_R, B_R] = iP_R, \quad [P_R, B_R] = \frac{i}{c^2} H_R$$

また, 「非相対論的極限」  $c \rightarrow \infty$  をとると, Sutherland Hamiltonian  $H_S$  が出て来る.

$$\lim_{c \rightarrow \infty} (H_R - Nc^2) = \frac{1}{2} H_S.$$

$S_{\pm 1}$  を  $x_j = e^{iz_j}$ ,  $q = e^{-1/c}$ ,  $t = e^{-\beta/c}$  において書き換えてみよう.

$$S_{\pm 1} = \sum_{j=1}^N \prod_{k(\neq j)} \left( \frac{t^{\pm 1} x_j - x_k}{x_j - x_k} \right)^{1/2} T_{q, x_j} \prod_{k(\neq j)} \left( \frac{t^{\mp 1} x_j - x_k}{x_j - x_k} \right)^{1/2}$$

となる. ここで,  $T_{q, x_j}$  は  $q$ -shift operator である.

$$T_{q, x_j} f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) = f(x_1, \dots, qx_j, \dots, x_N)$$

このハミルトニアンに対する基底状態は,

$$\psi_0^{(R)} \propto \prod_{i \neq j} \prod_{k \geq 0} \left( \frac{x_i - q^k x_j}{x_i - tq^k x_j} \right)^{1/2}$$

で与えられる.  $S_{\pm 1}$  から  $\psi_{R,0}$  の寄与を取り去ると,

$$\left( \psi_0^{(R)} \right)^{-1} \circ S_{\pm 1} \circ \psi_0^{(R)} = t^{\mp(N-1)/2} \widehat{M}(q^{\pm 1}, t^{\pm 1})$$

となる. ここで,  $\widehat{M}(q, t)$  は Macdonald 演算子と呼ばれる  $q$ -差分作用素である [9, 10].

$$\widehat{M}(q, t) = \sum_{j=1}^N \prod_{k(\neq j)} \frac{tx_j - x_k}{x_j - x_k} T_{q, x_j}.$$

この場合も Jack 多項式のとおり同様に,  $m_\lambda$  をうまく並べてから  $\widehat{M}(q, t)$  を作用させると係数行列は上三角になる. それを対角化して得られる固有関数が Macdonald 多項式である. すなわち, 次のようにして定義することができる.

### 固有関数としての Macdonald 多項式の定義

Macdonald 多項式  $P_\lambda(x)$  とは,  $\widehat{M}(q, t)$  の固有関数のうち, 次のような展開形をもつものである:

$$P_\lambda(x) = m_\lambda(x) + \sum_{\mu(<\lambda)} u_{\lambda\mu} m_\mu(x)$$

$\widehat{M}(q, t)$  の固有値  $\epsilon_\lambda$  は,

$$\begin{aligned}\epsilon_\lambda &= \sum_{j=1}^N t^{N-j} q^{\lambda_j} \\ &= t^{N-1} q^{\lambda_1} + t^{N-2} q^{\lambda_2} + t^{N-3} q^{\lambda_3} + \cdots + t q^{\lambda_{N-1}} + q^{\lambda_N}\end{aligned}$$

で与えられる. Jack 多項式の場合と違って, (generic な  $q, t$  に対しては) 固有値の縮退がないことを注意しておく.

次に, 以下のような 2 種類の内積を導入しよう.

### 波動関数としての内積

$$\begin{aligned}(f, g)_M &= \oint f(x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_N^{-1}) g(x_1, x_2, \dots, x_N) \{\psi_0^{(R)}(x)\}^2 \prod_{j=1}^N \frac{dx_j}{2\pi i x_j} \\ &= f(x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_N^{-1}) g(x_1, x_2, \dots, x_N) \{\psi_0^{(R)}(x)\}^2 \text{ の定数項}\end{aligned}$$

### 組合せ論的な内積

$p_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) に対して,

$$\langle p_m, p_n \rangle_M = m \frac{1 - q^m}{1 - t^m} \delta_{m,n}$$

とする. 一般の  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  に対しては,

$$\begin{aligned}\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_M &= \text{per} \left( \langle p_{\lambda_i}, p_{\mu_j} \rangle_M \right)_{i,j=1,\dots,N} \\ &= \delta_{\lambda\mu} z_\lambda \prod_{j=1}^{l(\lambda)} \frac{1 - q^{\lambda_j}}{1 - t^{\lambda_j}}\end{aligned}$$

この 2 種類の内積のどちらに関しても  $\widehat{M}(q, t)$  は自己共役となる:

$$(f, \widehat{M}(q, t)g)_M = (\widehat{M}(q, t)f, g)_M, \quad \langle f, \widehat{M}(q, t)g \rangle_M = \langle \widehat{M}(q, t)f, g \rangle_M$$

このことと固有値に縮退がないことから, Macdonald 多項式の直交性が示されたことになる.

Jack 多項式は Macdonald 多項式において  $t = q^\beta, q \rightarrow 1$  という極限 (非相対論的極限) をとると得られる. このとき, 上の 2 種類の内積は Jack 多項式のそれに移るので, Macdonald 多項式の直交性から Jack 多項式の直交性が従う.

## 4.2 非対称 Jack 多項式

3.2 節の  $\pi_j$  は可換ではなかったが、これをちょっとズラすことによって可換な作用素  $\hat{\pi}_j$  を作ることができる [16, 17]:

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_j &= \pi_j + \beta \sum_{k(<j)} s_{jk} \\ &= x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \beta \sum_{k(<j)} \frac{x_k}{x_j - x_k} (s_{jk} - 1) - \beta \sum_{k(>j)} \frac{x_j}{x_j - x_k} (s_{jk} - 1) + \beta(j-1)\end{aligned}$$

これらの作用素は、次の交換関係に従う:

$$\begin{aligned}[\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_j] &= 0, \\ \hat{\pi}_{i+1} s_{i,i+1} - s_{i,i+1} \hat{\pi}_i &= \beta, \\ s_{i,i+1} \hat{\pi}_{i+1} - \hat{\pi}_i s_{i,i+1} &= \beta, \\ [s_{i,i+1}, \hat{\pi}_k] &= 0 \quad (k \neq i, i+1).\end{aligned}$$

これらは、( $A_{N-1}$  型の root 系に付随した) degenerate affine Hecke algebra の定義関係式 [19] に一致することを注意しておく。

$\hat{\pi}_j$  達は可換なので、 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]$  の基底をうまく選べば同時対角化が可能である。まず、分割  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ 、対称群  $S_N$  の元  $w$  に対して、単項式  $x_w^\lambda$  を  $x_w^\lambda = x_{w(1)}^{\lambda_1} \cdots x_{w(N)}^{\lambda_N}$  と定義しておく。この  $x_w^\lambda$  を、以下で定義する順序に従って並べると  $\hat{\pi}_j$  達は同時に対角化される。

$$(\mu, w') < (\lambda, w) \iff \begin{cases} \text{(i)} & \mu <_D \lambda, \\ \text{(ii)} & \mu = \lambda \text{ のときは } w' <_B w. \end{cases}$$

ここで  $<_B$  は Bruhat order である。

### Bruhat order

対称群  $S_N$  の元  $w$  を互換  $s_j = (j, j+1)$  ( $j$  と  $j+1$  との入れ換え) を用いて表すとき、語の長さの最小値を  $l(w)$  と表す。このとき、 $S_N$  の元  $w, w'$  に対して、半順序  $<_B$  を次のように定義する。

$$\begin{aligned}w <_B w' &\iff l(w) < l(w') \quad \text{かつ} \\ & \quad w' = s_{i_1} \cdots s_{i_m} w s_{j_1} \cdots s_{j_n} \quad \text{を満たす} \\ & \quad s_{j_1}, \dots, s_{i_m}, s_{j_1}, \dots, s_{j_n} \quad \text{が存在する}\end{aligned}$$

以上のようにして得られる  $\hat{\pi}_j$  達の同時固有関数は、分割  $\lambda$  と  $S_N$  の元  $w$  とでラベル付けされる。これを  $\mathcal{J}_w^\lambda(x)$  と表すことにしよう。この同時固有関数は、「非対称 Jack 多項式」と呼ばれる。

$\hat{\pi}_j$  達を同時対角化するというアイデアが論文に載ったのは、(筆者の知る限りでは、) Bernard らの [17] が最初であろう。しかし、当時既に Opdam もそのようなことが可能であることを知っていたそうである。Bernard らが  $A_{N-1}$  型の root 系に付随した模型しか扱っ

ていないのに対し, Opdam の論文 [18] ではより一般の場合を, 数学的な観点から考察している. ここでもまた (問題意識は違うにせよ) 数学と物理で同一の題材を取り扱っていたわけである.

この「非対称 Jack 多項式」を用いると, Jack 多項式の直交性を示すことができる. まず,  $S_N$  の “longest element”, すなわち  $w_0(j) = N - j + 1$  ( $j = 1, \dots, N$ ) を満たす  $w_0$  に対しては, 固有値は次式で与えられる.

$$\hat{\pi}_j \mathcal{J}_{w_0}^\lambda(x) = \{\lambda_{N-j+1} + \beta(j-1)\} \mathcal{J}_{w_0}^\lambda(x). \quad (11)$$

他の  $w \in S_N$  に対しても,  $\hat{\pi}_j$  の固有値の全体  $\{\epsilon_j(\lambda, w)\}_{j=1, \dots, N}$  は, 適当に並べ変えることで (11) の  $\{\lambda_{N-j+1} + \beta(j-1)\}_{j=1, \dots, N}$  に一致する.

一方, Sutherland 模型のハミルトニアンは,  $\hat{\pi}_j$  を用いると

$$\tilde{H}_S = \sum_{j=1}^N \left\{ \hat{\pi}_j - \frac{\beta}{2}(N-1) \right\}^2$$

と表されるが, これと上記の  $\hat{\pi}_j$  の固有値とから,  $\tilde{H}_S$  の固有値 (7) が再現される.

さらに, 保存量の母関数  $\hat{\Delta}_S(u)$  を

$$\hat{\Delta}_S(u) = \prod_{j=1}^N (u + \hat{\pi}_j)$$

で導入する. これは  $\hat{\pi}_j$  に関して対称であるから, Jack 多項式を固有関数として持つ. また, その固有値は,

$$\hat{\Delta}_S(u) J_\lambda(x) = \prod_{j=1}^N \{u + \lambda_{N-j+1} + \beta(j-1)\} J_\lambda(x) \quad (12)$$

で与えられる. ここで, この固有値は (generic な  $\beta, u$  に対しては) 縮退していないことに注意していただきたい. このことと  $\hat{\Delta}_S(u)$  が内積 (8) に関して自己共役であることから, Jack 多項式が内積 (8) に関して直交していることが分かる.

## 5 Calogero 模型

### 5.1 Calogero 模型と一般化された Hermite 多項式

次にハミルトニアン (2) を考えよう. ハミルトニアン  $H_C$  に対する基底状態の波動関数は,

$$\psi_0^{(C)} = \prod_{j < k} |x_j - x_k|^\beta \prod_{j=1}^N \exp\left(-\frac{x_j^2}{2}\right)$$

で与えられる. Sutherland 模型の場合と同様に,  $H_C$  から  $\psi_0^{(C)}$  の寄与を取り除いてみよう.

$$\begin{aligned} \tilde{H}_C &= (\psi_0^{(C)})^{-1} \circ H_C \circ \psi_0^{(C)} - \frac{1}{2}\{N + \beta N(N-1)\} \\ &= \underbrace{\sum_{j=1}^N x_j \frac{\partial}{\partial x_j}}_{H_1} - \frac{1}{2} \underbrace{\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \beta \sum_{j \neq k} \frac{1}{x_j - x_k} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \right\}}_{H_2} \end{aligned}$$

この  $\widetilde{H}_C$  において, Euler operator  $H_1$  は多項式の次数を保つが  $H_2$  は次数を 2 だけ下げるので, 固有関数はもはや斉次ではない. しかし, この場合も対称多項式の空間の基底を具体的に決めて計算してやれば固有多項式を求めることができる. Baker と Forrester は基底として Jack 多項式を採用した. すなわち,

$$\phi_\lambda(x) = J_\lambda(x) + \sum_{|\mu| < |\lambda|} v_{\lambda\mu} J_\mu(x) \quad (13)$$

という形を仮定し, これが  $\widetilde{H}_C$  の固有関数となるように係数  $v_{\lambda\mu}$  を決めればよい. 彼らはこの  $\phi_\lambda(x)$  を「一般化された Hermite 多項式」と名付け, 様々な公式を導いている [20, 21]. また van Diejen は, ある  $q$ -差分方程式の解の極限としてこの多項式を特徴づけ, その性質を調べている [22].

一方この模型では, 調和振動子の場合と同様に, 生成・消滅演算子を用いて系のスペクトルを記述することができる.

$$A_j^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(-D_j + x_j), \quad A_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(D_j + x_j)$$

構成法から自明であるが,  $A_j^\dagger, A_j$  の交換関係は  $x_j, D_j$  のそれと同じである.

$$\begin{aligned} [A_i^\dagger, A_j^\dagger] &= [A_i, A_j] = 0, \\ s_{ij} A_j^\dagger &= A_i^\dagger s_{ij}, \quad s_{ij} A_j = A_i s_{ij}, \\ s_{ij} A_k^\dagger &= A_k^\dagger s_{ij}, \quad s_{ij} A_k = A_k s_{ij} \quad (k \neq i, j), \\ [A_i, A_j^\dagger] &= \delta_{ij} \left( 1 + \beta \sum_{k(\neq i)} s_{ik} \right) - (1 - \delta_{ij}) \beta s_{ij} \end{aligned} \quad (14)$$

ここで,

$$\widetilde{H}'_C = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (A_j^\dagger A_j + A_j A_j^\dagger)$$

と定義する. 一方, ハミルトニアン  $\widetilde{H}_C$  から基底状態  $\psi_0^{(C)}$  のうちの差積の部分の寄与だけ除くことを考えると,

$$\begin{aligned} &\prod_{j < k} |x_j - x_k|^{-\beta} \circ H_C \circ \prod_{j < k} |x_j - x_k|^\beta \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left( -\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + x_j^2 \right) - \frac{\beta}{2} \sum_{j \neq k} \frac{1}{x_j - x_k} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \end{aligned}$$

となるが, これが  $\widetilde{H}'_C$  と次のように関係する.

$$\text{Res}(\widetilde{H}'_C) = \prod_{j < k} |x_j - x_k|^{-\beta} \circ H_C \circ \prod_{j < k} |x_j - x_k|^\beta$$

よって, 対称な波動関数を考える際には  $\widetilde{H}'_C$  を調べても同じことである.

差積の部分の寄与を除いてあるので, この演算子に対する基底状態は

$$\widetilde{\psi}_0^{(C)}(x) = \prod_{j=1}^N \exp\left(-\frac{x_j^2}{2}\right)$$

である. この  $\psi_0(x)$  は「消滅演算子」 $A_j^\dagger$  の作用の下で消える, すなわち  $A_j^\dagger \tilde{\psi}_0^{(c)}(x) = 0$  が成り立つ. また, 都合のいいことに交換関係

$$[\widetilde{H}'_c, A_j^\dagger] = A_j^\dagger, \quad [\widetilde{H}'_c, A_j] = -A_j$$

は調和振動子の場合と全く同じなので, 固有空間の縮退の様子も同じである. すなわち, 調和振動子の場合と同様に対称多項式の基底として monomial symmetric functions をとり, 改めて

$$\widehat{m}_\lambda^\dagger = m_\lambda(A_j^\dagger), \quad \widehat{m}_\lambda = m_\lambda(A_j)$$

とおくと, この場合も性質 (5) は成り立つので, 固有ベクトルの分布の様子は図 1 と全く同じになる.

しかしこの基底は, 内積

$$(f, g)_c = {}_c\langle 0|f(A_1, A_2, \dots, A_N)g(A_1^\dagger, A_2^\dagger, \dots, A_N^\dagger)|0\rangle_c$$

の下で直交基底でない. 実は, 直交基底を得るには Jack 多項式を用いて,

$$J_\lambda(A_1^\dagger, A_2^\dagger, \dots, A_N^\dagger)\tilde{\psi}_0^{(c)}(x) \quad (15)$$

とすればよい [23]. 実際に計算すれば, この波動関数は基底状態  $\tilde{\psi}_0^{(c)}$  と, Baker, Forrester の「一般化された Hermite 多項式」という形をしている. すなわち, (13) と (15) とは本質的には同じものである.

Baker と Forrester は, (13) の直交性を導く際に, 彼らが「一般化された Jacobi 多項式」と呼ぶ多項式からの極限操作を用いた. また, van Diejen は  $q$ -差分作用素の固有関数からの極限操作によって直交性を示した. 実は, 代数的に考えれば, 直交性は極限操作を用いることなしに示すことができる [23]. それについては次節で述べることにしよう.

## 5.2 Calogero 模型に対する直交基底

まず ( $A_j^\dagger, A_j$  の定義により自明であるが) 交換関係 (10) と (14) とが全く同じであることに注意する. このことから,  $A_j^\dagger, A_j, s_{jk}$  の生成する代数は  $x_j, D_j, s_{jk}$  の生成する代数  $\mathcal{A}_S$  と同型であることが分かる:

$$\rho(x_j) = A_j^\dagger, \quad \rho(D_j) = A_j, \quad \rho(s_{jk}) = s_{jk}.$$

次に, 二つの  $\mathcal{A}_S$ -module  $\mathcal{F}_S, \mathcal{F}_C$  とを以下のように定義する.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_S &= \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_N]\tilde{\psi}_0^{(S)}, & \tilde{\psi}_0^{(S)} &= 1 \\ \mathcal{F}_C &= \mathbb{C}[A_1^\dagger, A_2^\dagger, \dots, A_N^\dagger]\tilde{\psi}_0^{(C)}, & \tilde{\psi}_0^{(C)} &= \prod_{j=1}^N \exp\left(-\frac{x_j^2}{2}\right) \end{aligned}$$

( $\mathcal{F}_C$  には  $\rho$  を通して作用する). ここで,

$$\begin{aligned} D_j \tilde{\psi}_0^{(S)} = 0 & \leftrightarrow A_j \tilde{\psi}_0^{(C)} = 0 \\ s_{jk} \tilde{\psi}_0^{(S)} = \tilde{\psi}_0^{(S)} & \leftrightarrow s_{jk} \tilde{\psi}_0^{(C)} = \tilde{\psi}_0^{(C)} \end{aligned}$$

であるので,  $a \in \mathcal{A}_S, \varphi \in \mathcal{F}_S$  に対して

$$\rho(\tilde{\psi}_0^{(S)}) = \tilde{\psi}_0^{(C)}, \quad \rho(a\varphi) = \rho(a)\rho(\varphi)$$

と定めれば  $\rho$  は  $\mathcal{A}_S$ -module としての同型写像となる.

この  $\rho$  を用いて

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_C(u) &= \rho(\hat{\Delta}_S(u)) = \prod_{j=1}^N (u + \hat{h}_j), \\ \hat{h}_j &= \rho(\hat{\pi}_j) = A_j^\dagger A_j + \beta \sum_{k(<j)} s_{jk} \end{aligned}$$

とすると, (12) に  $\rho$  を作用することで次式が得られる:

$$\hat{\Delta}_C(u) J_\lambda(A^\dagger) \psi_0^{(C)} = \prod_{j=1}^N \{u + \lambda_{N-j+1} + \beta(j-1)\} J_\lambda(A^\dagger) \psi_0^{(C)}.$$

よって, 4.2 節と同様の議論により, 基底 (15) の直交性が示される.

### 5.3 $B_N$ 型 Calogero 模型

前節で議論した Calogero 模型は  $S_N$ , すなわち  $A_{N-1}$  型の Weyl 群の対称性を持っていた.  $B_N$  型の Weyl 群の対称性を持つ Calogero 模型のハミルトニアンは次式で与えられる [24, 25].

$$H_B = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left( -\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + x_j^2 + \frac{\gamma(\gamma-1)}{x_j^2} \right) + \sum_{j<k} \left\{ \frac{\beta(\beta-1)}{(x_j-x_k)^2} + \frac{\beta(\beta-1)}{(x_j+x_k)^2} \right\}.$$

ここで,  $t = j$  は  $B_N$  型の Weyl 群の元であり,

$$t_j f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) = f(x_1, \dots, -x_j, \dots, x_N)$$

のように作用する. ここで,  $C_N$  型のハミルトニアンは  $B_N$  型と同じであり,  $D_N$  型は  $\gamma = 0$  とおいたものであることを注意しておく.

この模型に対する基底状態の波動関数は

$$\psi_0^{(B)}(x_1, \dots, x_N) = \prod_{j<k} |x_j^2 - x_k^2|^\beta \prod_{j=1}^N |x_j|^\gamma \prod_{j=1}^N \exp\left(-\frac{x_j^2}{2}\right).$$

で与えられる.

この模型に対しても,  $B_N$  型の Dunkl operator

$$\begin{aligned} D_j^{(B)} &= \frac{\partial}{\partial x_j} + \gamma \sum_{j=1}^N \frac{1}{x_j} (1 - t_j) \\ &\quad + \beta \sum_{k(\neq j)} \left\{ \frac{1}{x_j - x_k} (1 - s_{jk}) + \frac{1}{x_j + x_k} (1 - t_j t_k s_{jk}) \right\} \end{aligned}$$

を用いると生成・消滅演算子を構成することができる。

$$A_j^{(B)\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-D_j^{(B)} + x_j), \quad A_j^{(B)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(D_j^{(B)} + x_j).$$

ここで,

$$\widetilde{H}_B = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (A_j^{(B)\dagger} A_j^{(B)} + A_j^{(B)} A_j^{(B)\dagger})$$

という演算子を考えると, 交換関係

$$[\widetilde{H}_B, A_j^{(B)\dagger}] = A_j^{(B)\dagger}, \quad [\widetilde{H}_B, A_j^{(B)}] = -A_j^{(B)}$$

を満たす.  $A_{N-1}$  型のと様とに, この  $\widetilde{H}_B$  は, ハミルトニアン  $H_B$  から差積の部分の寄与を除いたものと次のように関係する:

$$\begin{aligned} \text{Res}(\widetilde{H}_B) &= (\phi_0^{(B)})^{-1} \circ H_B \circ (\phi_0^{(B)}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left( -\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + x_j^2 - \frac{2\gamma}{x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \beta \sum_{k \neq j} \frac{1}{x_j^2 - x_k^2} \left( x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

ここで,  $\phi_0^{(B)}$  は基底状態のうちの差積の部分である:

$$\phi_0^{(B)}(x_1, \dots, x_N) = \prod_{j < k} |x_j^2 - x_k^2|^\beta \prod_{j=1}^N |x_j|^\gamma.$$

よって,  $H_B$  の固有関数の分布の様子は, またも調和振動子系の場合と同じになる.

さらに, このモデルに対しても前節と同様の手法で直交基底を構成することができる [26]:

$$J_\lambda \left( (A_1^\dagger)^2/2, \dots, (A_N^\dagger)^2/2 \right) |0\rangle_C = (N \text{ 変数直交多項式}) \times (\text{基底状態}) \quad (17)$$

ここに現れる直交多項式に対しては, 変数  $y_j = x_j^2$  を導入した方が都合がよい.  $y_j$  で書き直すと, 多項式部分  $\varphi_\lambda(y)$  に作用するハミルトニアン  $\widetilde{H}'_B = (\psi_0^{(B)})^{-1} \circ H_B \circ \psi_0^{(B)}$  の具体的な形は,

$$\begin{aligned} \widetilde{H}'_B &= (\psi_0^{(B)})^{-1} \circ H_B \circ \psi_0^{(B)} \\ &= -2 \sum_{j=1}^N \left\{ y_j \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} + \left( \frac{1}{2} + \gamma - y_j \right) \frac{\partial}{\partial y_j} \right\} - 4\beta \sum_{j \neq k} \frac{y_j}{y_j - y_k} \frac{\partial}{\partial y_j} \end{aligned} \quad (18)$$

となる. 特に  $N = 1$  のとき, 多項式部分に対する微分方程式は次のようになる:

$$\left( y \frac{d^2}{dy^2} + \left( \frac{1}{2} + \gamma - y \right) \frac{d}{dy} + n \right) f_n(y) = 0.$$

これは, Laguerre の微分方程式である. このことから, Baker と Forrester は波動関数 (17) を  $y_j$  で書き直したときの多項式部分を「一般化された Laguerre 多項式」と呼んでいる [20, 21].

## 6 終りに

前節で述べたように, rational な Calogero 模型の波動関数は,

$$\left( \text{多変数多項式} \right) \times \prod_{j=1}^N \exp \left( -\frac{x_j^2}{2} \right)$$

という形をしている. ここに現れる多変数多項式を, 通常量子力学の意味での内積で直交化したものを「一般化された直交多項式」と呼んだのであった.

直交多項式を多変数化する方法は一通りに限られるわけではもちろんないので, この呼び名が妥当であるかどうかには異論もあろう. しかし, 直交多項式と量子力学との密接な関係を考えると, 可積分な量子多体系の波動関数として現れる多項式に, 何らかの意味の普遍性を期待してもよいのではないだろうか.

本論説では具体的な計算の側面を強調したため, 背後の代数構造についてはほとんど触れなかった.  $1/r^2$  型の長距離相互作用を持つ模型は, (degenerate) affine Hecke 代数, Virasoro 代数などといった代数と深い関係があることが分かっているが, それについては本講究録の他の論説を参照していただきたい. Appendix 2 に, Bergshoeff と Vasiliev による Dunkl 作用素を用いた Virasoro 代数の表現を紹介しておいたので, 何かの参考になれば幸いである.

## Appendices

### Appendix 1: Sutherland 模型の一般の励起状態

3.1 節では, 励起状態の波動関数を構成する際に  $x_j$  の正巾の項しか考えなかった. このことの妥当性は, 次の事実に基づく.

**Proposition:**

Jack 多項式  $J_\lambda(x)$  に対して,  $(x_1 \cdots x_N)^k J_\lambda(x)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) も (6) 式の  $\widetilde{H}_S$  の固有関数となる.

証明:

$$(x_1 \cdots x_N)^{-k} \circ \widetilde{H}_S \circ (x_1 \cdots x_N)^k = \widetilde{H}_S + Nk^2 + 2k \sum_{j=1}^N x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Jack 多項式  $J_\lambda(x)$  は斉  $|\lambda|$  次の多項式であるので, その固有値を  $\epsilon_\lambda$  とすると,

$$\widetilde{H}_S \left( (x_1 \cdots x_N)^k J_\lambda(x) \right) = \left( \epsilon_\lambda + Nk^2 + 2k|\lambda| \right) \left( (x_1 \cdots x_N)^k J_\lambda(x) \right)$$

が成り立つ. ■

このことから, 上の  $k$  を負の整数に選べば負巾を含んだ固有関数も取り扱えることが分かる. すなわち, 正巾の項からなる Jack 多項式のみを考えれば十分であることになる.

## Appendix2: Dunkl operator を用いた Virasoro 代数の表現

Dunkl operator (9) を用いて Virasoro 代数の表現を構成することもできる [27].

$$L_{-n} = \sum_{j=1}^N \left( \alpha x_j^{n+1} D_j + (1 - \alpha) D_j x_j^{n+1} + \gamma(n+1)x_j^n \right)$$

とおくと, 任意の  $\alpha, \beta, \gamma$  に対して  $L_{-n}$  は次の交換関係に従う:

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n}.$$

すなわち, Virasoro 代数

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{m^3 - m}{12} \delta_{m,-n} c$$

の  $c = 0$  の表現になっている. また,  $\beta = 0$  では, 良く知られた表現

$$L_n = -z^{n+1} \frac{d}{dz}$$

(これも  $c = 0$ ) の直積になる.

## 参考文献

- [1] 川上則雄・梁成吉: 「1次元量子系の物理 (その9)」 固体物理 **30** (1995) 425-437.
- [2] 樋上和弘: 「1次元  $1/r^2$  模型」 数理科学, 1995年1月号, pp.5-10.
- [3] 川上則雄: 「Asymptotic Bethe Ansatz と分数排他統計」 数理科学, 1995年1月号, pp.53-58.
- [4] 加藤雄介・倉本義夫: 「分数排他統計と  $1/r^2$  型相互作用を持つ可解模型」 固体物理 **31** (1996) 117-123.
- [5] 栗田英資: 「Jack 多項式の物理」, 数理科学 1996年9月号 pp.12-19.
- [6] 三町勝久: 「Newton から Macdonald まで  $q$ -解析入門」, 数理科学 1996年9月号 pp.21-27.
- [7] B. Sutherland: Phys. Rev. **A4** (1971) 2019-2021; Phys. Rev. **A5** (1972) 1372-1376.
- [8] F. Calogero: J. Math. Phys. **12** (1971) 419-436.
- [9] I. G. Macdonald: Seminaire Lotharingien, Publ. I.R.M.A. Strasbourg (1988) 131-171.
- [10] I. G. Macdonald: “Symmetric Functions and Hall Polynomials”, 2nd edition, Clarendon Press, Oxford, 1995.

- [11] R.P. Stanley: Adv. in Math. **77** (1988) 76-115.
- [12] C.F. Dunkl: Trans. Amer. Math. Soc. **311** (1989) 167-183.
- [13] A.P. Polychronakos: Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 703-705.
- [14] L. Brink, T.H. Hansson and M. Vasiliev: Phys. Lett. **B286** (1992) 109-111.
- [15] S.N.M. Ruijsenaars: Commun. Math. Phys. **110** (1987) 191-213.
- [16] I. Cherednik: Invent. Math. **106** (1991) 411-432.
- [17] D. Bernard, M. Gaudin, F.D.M. Haldane and V. Pasquier: J. Phys. **A26** (1993) 5219-5236.
- [18] E.M. Opdam: Acta Math. **175** (1995) 75-121.
- [19] V. Drinfeld: Funct. Anal. Appl. **20** (1986) 58-60.
- [20] T.H. Baker and P.J. Forrester: “*The Calogero-Sutherland Model and Generalized Classical Polynomials*”, preprint (solv-int/9608004).
- [21] T.H. Baker and P.J. Forrester: “*The Calogero-Sutherland Model and Polynomials with Prescribed Symmetry*”, preprint (solv-int/9609010).
- [22] J.F. van Diejen: “*Confluent Hypergeometric Orthogonal Polynomials Related to the Rational Quantum Calogero System with Harmonic Confinement*”, preprint (q-alg/9609032).
- [23] S. Kakei: J. Phys. **A29** (1996) L619-L624.
- [24] T. Yamamoto: Phys. Lett. **A208** (1995) 293-302.
- [25] T. Yamamoto and O. Tsuchiya: J. Phys. **A29** (1996) 3977-3984.
- [26] S. Kakei: “*An Orthogonal Basis for the  $B_N$ -type Calogero Model*”, preprint (solv-int/9610010), submitted to J. Phys. A.
- [27] E. Bergshoeff and M. Vasiliev: Int. J. Mod. Phys. **A10** (1995) 3477-3496.