

\mathfrak{g}_n オートマトンのボールゲーム

東大理 幡山五郎 (Goro Hatayama)

ソリトンのなふるまいを示すオートマトンである箱玉系 [TS, T] は、 $U'_q(A_n^{(1)})$ のクリスタルを用いても定義できる [FOY, HHIKTT]。その自然な発展として非例外型アフィンリー代数 \mathfrak{g}_n のクリスタルを用いてソリトンセルオートマトン (\mathfrak{g}_n オートマトンと呼ぶ) が導入された [HKT1]。箱玉系にはいくつかの拡張がありそれに対応する拡張は \mathfrak{g}_n オートマトンでもなされているが、その内「箱の容量 1、キャリヤの容量 ∞ 、ボールの種類有り」の箱玉系に対応する \mathfrak{g}_n オートマトンの発展規則をボールゲームに似た規則で示すのが本稿の目的である。これによって、 \mathfrak{g}_n オートマトンをクリスタルを用いずに扱えるので、クリスタルベース理論になじみのない方にも \mathfrak{g}_n オートマトンに興味を持っていただければ幸いです。

本稿は国場敦夫氏と高木太一郎氏との共同研究の結果をまとめたものである。

1 \mathfrak{g}_n オートマトン

1.1 クリスタルベース理論

クリスタルベース理論について、本稿で最低限必要な事柄を復習する。集合 I を固定する。クリスタル B とは、写像

$$\tilde{e}_a, \tilde{f}_a : B \sqcup \{0\} \longrightarrow B \sqcup \{0\}, (a \in I)$$

つきの集合であって、次の性質を持つものである。

- $\tilde{e}_a 0 = \tilde{f}_a 0 = 0$ 。
- 任意の $b \in B, a \in I$ に対して、 $\tilde{e}_a^n b = \tilde{f}_a^n b = 0$ を満たす $n > 0$ が存在する。
- $b, b' \in B, a \in I$ に対して、 $\tilde{f}_a b = b'$ は $b = \tilde{e}_a b'$ と同値である。

B の元 b に対して、

$$\varepsilon_a(b) = \max\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \tilde{e}_a^n b \neq 0\}, \quad \varphi_a(b) = \max\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \tilde{f}_a^n b \neq 0\}$$

とする。また、Weyl operator $S_a : B \rightarrow B$ ($a \in I$) を

$$S_a(b) = \begin{cases} \tilde{e}_a^{\varepsilon_a(b) - \varphi_a(b)} b & \text{if } \varepsilon_a(b) \geq \varphi_a(b), \\ \tilde{f}_a^{\varphi_a(b) - \varepsilon_a(b)} b & \text{if } \varepsilon_a(b) < \varphi_a(b). \end{cases}$$

で定義する。

2つのクリスタル B, B' に対して、テンソル積 $B \otimes B'$ を以下で定義する。集合としては、

$$B \otimes B' = \{b_1 \otimes b_2 \mid b_1 \in B, b_2 \in B'\}.$$

\tilde{e}_a や \tilde{f}_a の作用は

$$\tilde{e}_a(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{e}_a b_1 \otimes b_2 & \text{if } \varphi_a(b_1) \geq \varepsilon_a(b_2) \\ b_1 \otimes \tilde{e}_a b_2 & \text{if } \varphi_a(b_1) < \varepsilon_a(b_2), \end{cases} \quad (1)$$

$$\tilde{f}_a(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{f}_a b_1 \otimes b_2 & \text{if } \varphi_a(b_1) > \varepsilon_a(b_2) \\ b_1 \otimes \tilde{f}_a b_2 & \text{if } \varphi_a(b_1) \leq \varepsilon_a(b_2), \end{cases} \quad (2)$$

とする。ここで $0 \otimes b$ と $b \otimes 0$ は 0 と解釈する。上で与えられた \tilde{e}_a, \tilde{f}_a に対して、 ε_a, φ_a を定義どおり計算すると、

$$\varepsilon_a(b_1 \otimes b_2) = \max(\varepsilon_a(b_1), \varepsilon_a(b_1) + \varepsilon_a(b_2) - \varphi_a(b_1)), \quad (3)$$

$$\varphi_a(b_1 \otimes b_2) = \max(\varphi_a(b_2), \varphi_a(b_1) + \varphi_a(b_2) - \varepsilon_a(b_2)), \quad (4)$$

$$(5)$$

となることが確かめられる。3つ以上のクリスタルのテンソル積についても上記の方法を繰り返し使うことで定義する。たとえば $B \otimes B' \otimes B''$ に対する \tilde{e}_a や \tilde{f}_a の作用を求める際に、 $B \otimes B'$ を求めてからそれを1つのクリスタルとみなしてさらに $(B \otimes B') \otimes B''$ を計算しても、 $B' \otimes B''$ を求めてからそれを1つのクリスタルとみなしてさらに $B \otimes (B' \otimes B'')$ を計算しても、結果は同じになる。

クリスタルのテンソル積に対する $\tilde{e}_a, \tilde{f}_a, \varepsilon_a, \varphi_a$ をグラフィカルに求める方法 (*signature rule*) を紹介する。 $B(1), B(2), \dots, B(L)$ をクリスタルとして、 $p = b_1 \otimes b_2 \otimes \dots \otimes b_L \in B(1) \otimes B(2) \otimes \dots \otimes B(L)$ とする。 p の a -signature とは次のようにして求められる‘-’と‘+’の列のことである。

1. 各成分 b_k の下に $\varepsilon_a(b_k)$ 個の‘-’と $\varphi_a(b_k)$ 個の‘+’をこの順番に並べて書く。
2. p の下にある‘-’と‘+’の列から隣接する $(+, -)$ ペアをすべて消す。
3. 消した結果さらに隣接する $(+, -)$ ペアが生じたらそれもすべて消す。
4. 上の作業を隣接する $(+, -)$ ペアがなくなるまで行う。

p の signature は上のルールにより必ず $-\dots-+\dots+$ という並びになっている。ただし、‘-’や‘+’の個数は0になりうる。この signature を使うと次が言える。

signature rule

- a -signature の‘-’の個数が0の場合、 $\tilde{e}_a p = 0$ 。
そうでない場合は、もっとも右にある‘-’が b_m の下にあるとすると、

$$\tilde{e}_a p = b_1 \otimes \dots \otimes b_{m-1} \otimes \tilde{e}_a b_m \otimes b_{m+1} \otimes \dots \otimes b_L.$$

- a -signature の‘+’の個数が0の場合、 $\tilde{f}_a p = 0$ 。
そうでない場合は、もっとも左にある‘+’が b_m の下にあるとすると、

$$\tilde{f}_a p = b_1 \otimes \dots \otimes b_{m-1} \otimes \tilde{f}_a b_m \otimes b_{m+1} \otimes \dots \otimes b_L.$$

- $\varepsilon_a(p) = a$ -signature の‘-’の個数。
- $\varphi_a(p) = a$ -signature の‘+’の個数。

Example 1. 次をみたすクリスタルの元 b_i に対して、 $p = b_1 \otimes b_2 \otimes b_3 \otimes b_4$ とする。

$$\begin{array}{cccc} \varepsilon_a(b_1) = 4 & \varepsilon_a(b_2) = 3 & \varepsilon_a(b_3) = 1 & \varepsilon_a(b_4) = 2 \\ \varphi_a(b_1) = 2 & \varphi_a(b_2) = 2 & \varphi_a(b_3) = 1 & \varphi_a(b_4) = 2 \end{array}$$

p の a -signature を求めるルール 1-4 は

$$\begin{array}{ccccccc} b_1 & \otimes & b_2 & \otimes & b_3 & \otimes & b_4 \\ \begin{array}{c} - - - - + + \\ - - - - + \\ - - - - \end{array} & & \begin{array}{c} - - - + + \\ - - + \\ - \end{array} & & \begin{array}{c} - - + + \\ - + + \\ + + \end{array} & & \begin{array}{c} - - + + \\ - + + \\ + + \end{array} \\ \downarrow 3 \text{ 組の } (+, -) \text{ ペアを消す} & & & & & & \downarrow \text{新たに生じた 2 組の } (+, -) \text{ ペアを消す} \end{array}$$

のように適用されて、 p の a -signature は

$$\begin{array}{ccccccc} b_1 & \otimes & b_2 & \otimes & b_3 & \otimes & b_4 \\ - - - - & & - & & & & + + \end{array}$$

となる。signature rule により次がわかる。

$$\tilde{e}_a p = b_1 \otimes \tilde{e}_a b_2 \otimes b_3 \otimes b_4, \quad \tilde{f}_a p = b_1 \otimes b_2 \otimes b_3 \otimes \tilde{f}_a b_4, \quad \varepsilon_a(p) = 5, \quad \varphi_a(p) = 2.$$

また、Weyl operator S_a は定義により a -signature の ‘-’ と ‘+’ の個数を入れ替えるマップであり、この例では次のように求まる。

$$S_a(p) = \tilde{e}_a^2 b_1 \otimes \tilde{e}_a b_2 \otimes b_3 \otimes b_4.$$

最後に、あるクリスタル B に対して $B^{\otimes L}$ に作用する S_a を特殊な条件下で vertex diagram を使って表す方法を示す。

Definition 1. $b, b' \in B, x, x' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。

$$x \begin{array}{c} b \\ \downarrow \text{ }^a \\ x' \\ \downarrow \text{ }^a \\ b' \end{array} \text{ で } \begin{cases} b' = \tilde{e}_a^{(\varepsilon_a(b) - x)_+} b \\ x' = \varphi_a(b) + (x - \varepsilon_a(b))_+ \end{cases} \text{ という関係を表す。}$$

$(z)_+ = \max(z, 0)$ とする。 (x, b) を与えれば、 (b', x') が一意に決まることに注意。

Lemma 2. $p = b_1 \otimes b_2 \otimes \dots \otimes b_L \in B^{\otimes L}$ とする。 $\varphi_a(p) = 0$ ならば、 $b'_1 \otimes b'_2 \otimes \dots \otimes b'_L = S_a(p)$ は次の図を用いて求められる。

$$\begin{array}{ccccccc} b_1 & & b_2 & & & & b_L \\ \downarrow \text{ }^a & & \downarrow \text{ }^a & & & & \downarrow \text{ }^a \\ 0 \xrightarrow{\text{ }^a} x_1 \xrightarrow{\text{ }^a} x_2 \cdots x_{L-1} \xrightarrow{\text{ }^a} x_L \\ \downarrow \text{ }^a & & \downarrow \text{ }^a & & & & \downarrow \text{ }^a \\ b'_1 & & b'_2 & & & & b'_L \end{array}$$

Proof. 仮定により $b'_1 \otimes b'_2 \otimes \dots \otimes b'_L = \tilde{e}_a^{\varepsilon_a(p)} p$ なので、 p の a -signature にある ‘-’ のうち、 b_m の下にあるものの個数を y_m とすると $b'_m = \tilde{e}_a^{y_m} b_m$ と書ける。signature rule により、

$$y_m = (\varepsilon_a(b_m) - \varphi_a(b_1 \otimes b_2 \otimes \dots \otimes b_{m-1}))_+$$

である。また vertex diagram の定義により、 $x_m = \varphi_a(b_1 \otimes b_2 \otimes \dots \otimes b_m)$ 。以上により、主張の成立が言える。□

ここで抽象的に定義したクリスタルは、symmetrizable Kac-Moody Lie algebra \mathfrak{g} に対して量子代数 $U_q(\mathfrak{g})$ の表現の ‘ $q = 0$ limit’ によって実現される。本稿で使われるのは、 $U'_q(\mathfrak{g}_n)$ (\mathfrak{g}_n : 非例外型アフィンリー代数) の表現から作られるクリスタルであり、詳しくは [HKOTY] の Appendix とその参考文献を見ていただきたい。

1.2 オートマトンとその分解

アフィンリー代数 $\mathfrak{g}_n = A_n^{(1)}, A_{2n-1}^{(2)}, A_{2n}^{(2)}, B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}, D_{n+1}^{(2)}$ に対して、 $U'_q(\mathfrak{g}_n)$ の l -階対称テンソル積表現に対応するクリスタル B_l とその特別な元 (highest weight element) $u_l \in B_l$ を使ってオートマトンを定義する [HKT1, HKOTY]。 B_1 のクリスタル構造は Appendix A にあり、 $u_1 = \boxed{1}$ である。 B_l や u_l は [HKOTY] にあるものと同じである ($l > 1$ のデータは本稿を読む際には必要とされない)。 $I = \{0, 1, \dots, n\}$ を \mathfrak{g}_n の Dynkin diagram のインデックスの集合とし、そのラベリングは [Kac] に従う。この I がクリスタル B_l 上の写像 \tilde{e}_a, \tilde{f}_a の添え字をラベリングするのに使われる集合である。

$$W = \{b_1 \otimes b_2 \otimes b_3 \otimes \dots \mid b_i \in B_1, b_j = \boxed{1} \text{ for } j \gg 1\}$$

とし、 W 上にオートマトンを定義する。

Definition 3. $T : W \rightarrow W$ を次のように定義する：

$$T(p) = p' \quad (p, p' \in W)$$

$\Leftrightarrow \kappa \gg 1$ のとき、クリスタルの同型 [HKOT1, HKOT2]

$$B_\kappa \otimes (B_1 \otimes B_1 \otimes \dots) \simeq (B_1 \otimes B_1 \otimes \dots) \otimes B_\kappa \text{ によって } u_\kappa \otimes p \text{ が } p' \otimes u_\kappa \text{ に移る。}$$

W 上の発展規則を T で与えられる系を \mathfrak{g}_n オートマトンと呼ぶ。 T が well-defined であり、 \mathfrak{g}_n オートマトンはソリトン性をもつことなどがわかっている。 $\mathfrak{g}_n = A_n^{(1)}$ のときは、適当な読み替えによって箱の容量 1、キャリアの容量 n 、 n 種類のボールによる箱玉系 [T] に一致する。

Example 2. $\mathfrak{g}_n = A_3^{(1)}$ とする。

$$p = \boxed{3} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{4} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{1} \otimes \dots$$

$$T(p) = \boxed{1} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{4} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{1} \otimes \dots$$

次に、各代数 \mathfrak{g}_n に対して、 $d \in \mathbb{N}$, $i_k \in I$ ($k = 1, 2, \dots, d$), $\sigma : B_1 \rightarrow B_1$ を用意する。

\mathfrak{g}_n	d	i_d, \dots, i_1	σ on B_1
$A_n^{(1)}$	n	$2, 3, \dots, n, 0$	$\boxed{1} \rightarrow \boxed{n+1}, \boxed{a} \rightarrow \boxed{a-1} \ (a \geq 1)$ $\boxed{1} \leftrightarrow \overline{\boxed{1}}$
$A_{2n-1}^{(2)}$	$2n-1$	$0, 2, 3, \dots, n-1, n, n-1, \dots, 3, 2, 0$	id
$A_{2n}^{(2)}$	$2n$	$1, 2, 3, \dots, n-1, n, n-1, \dots, 2, 1, 0$	id
$B_n^{(1)}$	$2n-1$	$0, 2, 3, \dots, n-1, n, n-1, \dots, 3, 2, 0$	$\boxed{1} \leftrightarrow \overline{\boxed{1}}$
$C_n^{(1)}$	$2n$	$1, 2, 3, \dots, n-1, n, n-1, \dots, 2, 1, 0$	id
$D_n^{(1)}$	$2n-2$	$0, 2, 3, \dots, n-2, n, n-1, n-2, \dots, 3, 2, 0$	$\boxed{1} \leftrightarrow \overline{\boxed{1}}, \boxed{n} \leftrightarrow \overline{\boxed{n}}$
$D_{n+1}^{(2)}$	$2n$	$1, 2, 3, \dots, n-1, n, n-1, \dots, 2, 1, 0$	id

$T_m : W \rightarrow W$ ($m = 1, 2, \dots, d$) を

$$T_m = \sigma_m^\Delta S_{i_m} \cdots S_{i_2} S_{i_1},$$

$$\sigma_m^\Delta = \sigma_m \otimes \sigma_m \otimes \cdots \curvearrowright B_1 \otimes B_1 \otimes \cdots,$$

$$\sigma_m = S_{i_1} S_{i_2} \cdots S_{i_m} \curvearrowright B_1,$$

と定義する。 $T_m(W) \subset W$ かつ $\sigma_d = \sigma$ であることが B_1 のクリスタルグラフ (Appendix A) を見るとわかる。これらを使って発展規則 T を分解することができる：

Theorem 4 ([HKT2]). 各代数 \mathfrak{g}_n に対して、 $T = T_d$ が成立。

Example 3. $\mathfrak{g}_n = A_3^{(1)}$ とする。 $\boxed{\alpha} \in B_1$ を α と書き、 \otimes を \cdot と書いた。

$$p = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots$$

$$S_0(p) = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \dots \xrightarrow{\sigma_1^\Delta} 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots = T_1(p)$$

$$S_3 S_0(p) = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \xrightarrow{\sigma_2^\Delta} 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots = T_2(p)$$

$$S_2 S_3 S_0(p) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \xrightarrow{\sigma_3^\Delta} 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots = T_3(p)$$

これと Example 2 とを比べると、 $T = T_d$ の成立が p に対して確かめられる。

$\mathfrak{g}_n = A_n^{(1)}$ のときは、 $\boxed{1}$ を空箱、 $\boxed{\alpha}$ ($\alpha \neq 1$) を α でラベルされた玉とみなすことによって箱玉系と同一視すると、 T_m から T_{m+1} への変遷は $\boxed{n-m+1}$ が右に動いていく箱玉系の過程と一致することが上の Example から見て取れる ($T_0(p) = p$ とする)。

次の章では、まずこのことを証明する。その後、 $\mathfrak{g}_n \neq A_n^{(1)}$ のときに \mathfrak{g}_n オートマトンの T_m から T_{m+1} への変遷を表すボールゲームを定義し、それらが同値であることを示す。

最後に次章のために、[HKT2] よりレンマを 1 つ引用する。

Lemma 5 ([HKT2]). 各 \mathfrak{g}_n について、次が成立。

$$p \in S_{i_{m-1}} S_{i_{m-2}} \dots S_{i_1}(W) \Rightarrow \varphi_{i_m}(p) = 0 \quad (m = 1, \dots, d).$$

2 ボールゲーム

2.1 $\mathfrak{g}_n = A_n^{(1)}$ の場合

まず、[T] で導入された箱の容量 1、キャリヤの容量 ∞ 、 n 種類のボールによる箱玉系を vertex diagram を用いて表す。

$$V_1 = \{1, 2, \dots, n+1\}, \quad U = \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad (6)$$

$$\mathcal{W} = \{(v_1, v_2, \dots) \mid v_i \in V_1, v_j = 1 \text{ for } j \gg 1\}, \quad (7)$$

とする。 $\alpha \in V_1 \setminus \{1\}$ に対して、 $L_\alpha : U \times V_1 \rightarrow V_1 \times U$ を下の (i)-(iv) で定義する。

$$\begin{array}{cccc} \text{(i)} & \text{(ii)} & \text{(iii)} & \text{(iv)} \\ \begin{array}{c} \alpha \\ \downarrow \\ l \xrightarrow{\alpha} l+1 \\ \downarrow \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ l+1 \xrightarrow{\alpha} l \\ \downarrow \\ \alpha \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ 0 \xrightarrow{\alpha} 0 \\ \downarrow \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} \beta \\ \downarrow \\ l \xrightarrow{\alpha} l \\ \downarrow \\ \beta \end{array} \end{array}$$

ただし $l \geq 0$, $\beta \in V_1 \setminus \{1, \alpha\}$ であり、 $k \xrightarrow{\alpha} k'$ で $L_\alpha : (k, v) \mapsto (v', k')$ を表す。

$\alpha \in V_1 \setminus \{1\}$ に対して、 $K_\alpha : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ を L_α を使って下の図で定義する。

$$K_\alpha : (v_1, v_2, \dots) \mapsto (u_1, u_2, \dots) \Leftrightarrow \begin{array}{c} v_1 \quad v_2 \quad \dots \\ \downarrow \alpha \quad \downarrow \alpha \quad \downarrow \alpha \\ 0 \xrightarrow{\quad} \dots \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ u_1 \quad u_2 \quad \dots \end{array}$$

Definition 6 (箱玉系の時間発展). $T : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ を次の式で定める :

$$T = K_{j_n} K_{j_{n-1}} \dots K_{j_1}, \quad (8)$$

$$(j_n, j_{n-1}, \dots, j_1) = (2, 3, \dots, n+1). \quad (9)$$

$1 \in V_1$ を空箱と同一視し、 $\alpha (\neq 1) \in V_1$ を α でラベルされた玉と同一視することによって、 T の \mathcal{W} 上の作用が箱玉系の時間発展と一致する。また、 K_α は α でラベルされた玉が右に動いていく過程に一致する。

Theorem 7. V_1 と $U'_q(A_n^{(1)})$ クリスタル B_1 を $\alpha \leftrightarrow \boxed{\alpha}$ という対応のもと集合として同一視し、それに伴い W と \mathcal{W} も同一視すると、

$$T_m = K_{j_m} K_{j_{m-1}} \dots K_{j_1} \quad (m = 1, 2, \dots, n). \quad (10)$$

特に $m = n$ として、*Theorem 4* を使うと $T = \mathcal{T}$ が成立。

以下では *Theorem* にある同一視のもと、 \mathcal{W} 上の演算と W 上の演算との積を許し、 $\boxed{\alpha} \in B_1$ を単に α とも書く。

Proof. m に関する帰納法で示す。

$m = 1$ のとき、 $(\sigma_1^\Delta)^{-1} K_{n+1} = S_0$ を示せばよい。 σ_m^Δ が可逆であることは一般に S_a が可逆であることからわかる。 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\beta \in V_1 \setminus \{1, \alpha\}$ に対して

$$\begin{array}{cccc} n+1 & & 1 & & 1 & & \beta \\ l \downarrow & \rightarrow & l+1 & \downarrow & l & \rightarrow & 0 & \downarrow & 0 & \rightarrow & l & \downarrow & l \\ n+1 & & 1 & & n+1 & & \beta \end{array} \quad (11)$$

で定義される、 $U \times V_1 \rightarrow V_1 \times U$ を表す vertex diagram を用意する。 B_1 のクリスタルグラフより

$$(\sigma_1^\Delta)^{-1}(b) = \begin{cases} \boxed{n+1} & \text{if } b = \boxed{1}, \\ \boxed{1} & \text{if } b = \boxed{n+1}, \\ b & \text{otherwise.} \end{cases}$$

となることに注意すると、

$$(\sigma_1^\Delta)^{-1} K_{n+1} : (v_1, v_2, \dots) \mapsto (u_1, u_2, \dots) \Leftrightarrow \begin{array}{cccc} & v_1 & v_2 & \dots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & u_1 & u_2 & \dots \end{array}$$

が言える。(11) の vertex diagram は *Definition 1* で $B = B_1$, $a = 0$ としたときの vertex diagram と一致するので、*Lemma 2* と *Lemma 5* により $(\sigma_1^\Delta)^{-1} K_{n+1} = S_0$ が示された。

$m > 1$ のとき、 $p = n + 2 - m$ とする。帰納法の仮定により、 $(\sigma_m^\Delta)^{-1} K_p \sigma_{m-1}^\Delta = S_p$ を示せばよい。 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\beta \in V_1 \setminus \{p, p+1\}$ に対して

$$\begin{array}{cccc} p & & p+1 & & p+1 & & \beta \\ l \downarrow & \rightarrow & l+1 & \downarrow & l & \rightarrow & 0 & \downarrow & 0 & \rightarrow & l & \downarrow & l \\ p & & p+1 & & p & & \beta \end{array} \quad (12)$$

で定義される、 $U \times V_1 \rightarrow V_1 \times U$ を表す vertex diagram を新たに用意する。

b	1	2	3	\cdots	$p-1$	p	$p+1$	$p+2$	\cdots	n	$n+1$
$(\sigma_m^\Delta)^{-1}(b)$	p	2	3	\cdots	$p-1$	$p+1$	$p+2$	$p+3$	\cdots	$n+1$	1
$(\sigma_{m-1}^\Delta)^{-1}(b)$	$p+1$	2	3	\cdots	$p-1$	p	$p+2$	$p+3$	\cdots	$n+1$	1

となることに注意すると、

$$(\sigma_m^\Delta)^{-1}K_p\sigma_{m-1}^\Delta : (v_1, v_2, \dots) \mapsto (u_1, u_2, \dots) \Leftrightarrow \begin{array}{ccccccc} & v_1 & v_2 & \cdots & & & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\ 0 & & & & & & \\ & u_1 & u_2 & \cdots & & & \end{array}$$

が言える。(12) の vertex diagram は Definition 1 で $B = B_1$, $a = p$ としたときの vertex diagram と一致するので、Lemma 2 と Lemma 5 により $(\sigma_m^\Delta)^{-1}K_p\sigma_{m-1}^\Delta = S_p$ が示された。

□

2.2 $\mathfrak{g}_n \neq A_n^{(1)}$ の場合

まず前章と同様に、vertex diagram を用いてオートマトンを定義する。 $n(> 1)$ を固定する。

$$\tilde{V}' = \{1, -1\}, \tilde{V} = \{1, 2, \dots, n, 0, -n, \dots, -2, -1, \emptyset\}, U = \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad (13)$$

とし、集合 V_1 は $\tilde{V}' \subset V_1 \subset \tilde{V}$ を満たすものとする。 $L_\alpha : U \times V_1 \rightarrow V_1 \times U$ を下の図で定義する。

$$k \begin{array}{c} v \\ \downarrow \alpha \\ v' \end{array} \rightarrow k' \quad \text{で } L_\alpha : (k, v) \mapsto (v', k') \text{ を表す。}$$

1. $\alpha \notin \{1, 0, -1, \emptyset\}$ のとき。 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\beta \in V_1 \setminus \{\alpha, -\alpha, 1, -1\}$ とする。

$$l \begin{array}{c} \alpha \\ \downarrow \\ 1 \end{array} \rightarrow l+1 \quad l+1 \begin{array}{c} -\alpha \\ \downarrow \\ -1 \end{array} \rightarrow l \quad 0 \begin{array}{c} -\alpha \\ \downarrow \\ -\alpha \end{array} \rightarrow 0 \quad l \begin{array}{c} -1 \\ \downarrow \\ -\alpha \end{array} \rightarrow l+1 \quad l+1 \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ \alpha \end{array} \rightarrow l \quad 0 \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ 1 \end{array} \rightarrow 0 \quad l \begin{array}{c} \beta \\ \downarrow \\ \beta \end{array} \rightarrow l$$

2. $\alpha \in \{0, \emptyset\}$ のとき。 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\beta \in V_1 \setminus \{\alpha, 1, -1\}$ とする。

$$l \begin{array}{c} -1 \\ \downarrow \\ 1 \end{array} \rightarrow l+2 \quad 0 \begin{array}{c} \alpha \\ \downarrow \\ 1 \end{array} \rightarrow 1 \quad l+1 \begin{array}{c} \alpha \\ \downarrow \\ \alpha \end{array} \rightarrow l+1 \quad l+2 \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ -1 \end{array} \rightarrow l \quad 1 \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ \alpha \end{array} \rightarrow 0 \quad 0 \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ 1 \end{array} \rightarrow 0 \quad l \begin{array}{c} \beta \\ \downarrow \\ \beta \end{array} \rightarrow l$$

3. $\alpha = -1$ のとき。 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\beta \in V_1 \setminus \{1, -1\}$ とする。

$$l \begin{array}{c} -1 \\ \downarrow \\ 1 \end{array} \rightarrow l+1 \quad l+1 \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ -1 \end{array} \rightarrow l \quad 0 \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ 1 \end{array} \rightarrow 0 \quad l \begin{array}{c} \beta \\ \downarrow \\ \beta \end{array} \rightarrow l$$

$\mathcal{W} = \{(v_1, v_2, \dots) \mid v_i \in V_1, v_j = 1 \text{ for } j \gg 1\}$ とする。 $\alpha \in V_1 \setminus \{1\}$ に対して $K_\alpha : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ を

$$K_\alpha : (v_1, v_2, \dots) \mapsto (u_1, u_2, \dots) \Leftrightarrow \begin{array}{ccccccc} & v_1 & v_2 & \cdots & & & \\ & \downarrow \alpha & \downarrow \alpha & \downarrow \alpha & & & \\ 0 & & & & & & \\ & u_1 & u_2 & \cdots & & & \end{array}$$

で定義し、これを使って各代数 \mathfrak{g}_n に対して箱玉系に似たオートマトンを定義する。

Definition 8 (\mathfrak{g}_n に付随する箱玉系の時間発展). $T : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ を次の式で定める :

$$T = K_{j_d} K_{j_{d-1}} \dots K_{j_1} \quad (14)$$

ただし、 d は Section 1.2 で定義したものであり、各代数 \mathfrak{g}_n に対して $V_1, (j_d, \dots, j_1)$ は下の表で定める。

\mathfrak{g}_n	V_1	(j_d, \dots, j_1)
$A_{2n-1}^{(2)}$	$\{1, 2, \dots, n, -n, \dots, -2, -1\}$	$(2, 3, \dots, n, -1, -n, \dots, -3, -2)$
$A_{2n}^{(2)}$	$\{1, 2, \dots, n, -n, \dots, -2, -1, \emptyset\}$	$(2, 3, \dots, n, -1, -n, \dots, -3, -2, \emptyset)$
$B_n^{(1)}$	$\{1, 2, \dots, n, 0, -n, \dots, -2, -1\}$	$(2, 3, \dots, n, 0, -n, \dots, -3, -2)$
$C_n^{(1)}$	$\{1, 2, \dots, n, -n, \dots, -2, -1\}$	$(2, 3, \dots, n, -1, -n, \dots, -3, -2, -1)$
$D_n^{(1)}$	$\{1, 2, \dots, n, -n, \dots, -2, -1\}$	$(2, 3, \dots, n, -n, \dots, -3, -2)$
$D_{n+1}^{(2)}$	$\{1, 2, \dots, n, 0, -n, \dots, -2, -1, \emptyset\}$	$(2, 3, \dots, n, 0, -n, \dots, -3, -2, \emptyset)$

この T で発展規則を定める \mathcal{W} 上のオートマトンが \mathfrak{g}_n オートマトンと一致することが本稿の主定理である。

Theorem 9. V_1 と $U'_q(\mathfrak{g}_n)$ クリスタル B_1 を

$$\alpha \leftrightarrow \begin{cases} \boxed{-\alpha} & \text{if } \alpha \in \{-n, \dots, -1\}, \\ \boxed{\alpha} & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (15)$$

という対応のもと集合として同一視し、それに伴い W と \mathcal{W} も同一視すると、

$$T_m = K_{j_m} K_{j_{m-1}} \dots K_{j_1} \quad (m = 1, 2, \dots, d). \quad (16)$$

特に $m = d$ として、*Theorem 4* を使うと $T = T$ が成立。

証明は $\mathfrak{g}_n = A_n^{(1)}$ のときと同様に行えるので、 $\mathfrak{g}_n = A_{2n}^{(2)}$ のときを例にとって示す。他の代数のときも同様にできる。

Proof. m に関する帰納法で示す。

$m = 1$ のとき、 $(\sigma_1^\Delta)^{-1} K_\emptyset = S_0$ を示せばよい。 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \beta \in V_1 \setminus \{\emptyset, 1, -1\}$ に対して

$$\begin{array}{cccccccc}
 -1 & & \emptyset & & \emptyset & & 1 & & 1 & & 1 & & \beta \\
 l \downarrow & \rightarrow & l+2 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 1 & \rightarrow & l+1 & \rightarrow & l+2 & \rightarrow & l \\
 -1 & & -1 & & \emptyset & & 1 & & \emptyset & & -1 & & \beta \\
 \end{array} \quad (17)$$

で定義される、 $U \times V_1 \rightarrow V_1 \times U$ を表す vertex diagram を用意する。 B_1 のクリスタルグラフより

$$(\sigma_1^\Delta)^{-1}(b) = \begin{cases} \boxed{\bar{1}} & \text{if } b = \boxed{1}, \\ \boxed{1} & \text{if } b = \boxed{\bar{1}}, \\ b & \text{otherwise.} \end{cases}$$

となることに注意すると、

$$(\sigma_1^\Delta)^{-1}K_\emptyset : (v_1, v_2, \dots) \mapsto (u_1, u_2, \dots) \Leftrightarrow \begin{array}{ccccccc} & v_1 & v_2 & \dots & & & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\ 0 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\ & u_1 & u_2 & \dots & & & \end{array}$$

が言える。Theorem にある V_1 と B_1 との同一視のもと、(17) の vertex diagram は Definition 1 で $B = B_1$, $a = 0$ としたときの vertex diagram と一致するので、Lemma 2 と Lemma 5 により $(\sigma_1^\Delta)^{-1}K_\emptyset = S_0$ が示された。

$m > 1$ のとき。帰納法の仮定により、 $(\sigma_m^\Delta)^{-1}K_{j_m}\sigma_{m-1}^\Delta = S_{i_m}$ を示せばよい。上と全く同じ方針で示せるので、 $(\sigma_m^\Delta)^{-1}$ の計算結果と $(\sigma_m^\Delta)^{-1}K_{j_m}\sigma_{m-1}^\Delta$ を表す vertex diagram のみを掲載しておく。

- $(\sigma_m^\Delta)^{-1}$ on B_1 の計算結果：

$1 \leq m \leq n$ のとき。

$$(\sigma_m^\Delta)^{-1}(\boxed{a}) = \begin{cases} \boxed{m} & \text{if } a = 1, \\ \boxed{a-1} & \text{if } 1 < a \leq m, \\ \boxed{a} & \text{if } m < a \leq n, \end{cases}$$

$$(\sigma_m^\Delta)^{-1}(\overline{a}) = \begin{cases} \overline{m} & \text{if } a = 1, \\ \overline{a-1} & \text{if } 1 < a \leq m, \\ \overline{a} & \text{if } m < a \leq n, \end{cases}$$

$$(\sigma_m^\Delta)^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$n+1 \leq m \leq 2n(=d)$ のとき。

$p = 2n+1-m$ とおく。

$$(\sigma_m^\Delta)^{-1}(\boxed{a}) = \begin{cases} \boxed{p} & \text{if } a = 1, \\ \boxed{a-1} & \text{if } 1 < a \leq p, \\ \boxed{a} & \text{if } p < a \leq n, \end{cases}$$

$$(\sigma_m^\Delta)^{-1}(\overline{a}) = \begin{cases} \overline{p} & \text{if } a = 1, \\ \overline{a-1} & \text{if } 1 < a \leq p, \\ \overline{a} & \text{if } p < a \leq n, \end{cases}$$

$$(\sigma_m^\Delta)^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

- $(\sigma_m^\Delta)^{-1}K_{j_m}\sigma_{m-1}^\Delta$ を表す vertex diagram：

* $2 \leq m \leq n$ のとき。 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\beta \in V_1 \setminus \{m-1, m, -m, 1-m\}$ とする。

$$\begin{array}{ccccccccccc} & m-1 & & m & & m & & -m & & 1-m & & 1-m & & \beta \\ & \downarrow & \rightarrow & \downarrow & \rightarrow & \downarrow & \rightarrow & \downarrow & \rightarrow & \downarrow & \rightarrow & \downarrow & \rightarrow & \downarrow \\ l & \downarrow & l+1 & l+1 & \downarrow & l & 0 & \downarrow & 0 & l & \downarrow & l+1 & l+1 & \downarrow & l & 0 & \downarrow & 0 & l & \downarrow & l \\ & m-1 & & m & & m-1 & & -m & & 1-m & & -m & & \beta \end{array}$$

これは $S_{i_m} = S_{m-1}$ を表すものに一致する。

* $m = n+1$ のとき。 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\beta \in V_1 \setminus \{n, -n\}$ とする。

$$\begin{array}{ccccccc} & n & & -n & & -n & & \beta \\ & \downarrow & \rightarrow & \downarrow & \rightarrow & \downarrow & \rightarrow & \downarrow \\ l & \downarrow & l+1 & l+1 & \downarrow & l & 0 & \downarrow & 0 & l & \downarrow & l \\ & n & & -n & & n & & \beta \end{array}$$

これは $S_{i_m} = S_n$ を表すものに一致する。

* $n+2 \leq m \leq 2n(=d)$ のとき。 $p = 2n+1-m$, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\beta \in V_1 \setminus \{p, p+1, -p-1, -p\}$ とする。

$$\begin{array}{ccccccccccc} & p & & -p & & -p & & -p-1 & & p+1 & & p+1 & & \beta \\ & \downarrow & \rightarrow & \downarrow & \rightarrow & \downarrow & \rightarrow & \downarrow & \rightarrow & \downarrow & \rightarrow & \downarrow & \rightarrow & \downarrow \\ l & \downarrow & l+1 & l+1 & \downarrow & l & 0 & \downarrow & 0 & l & \downarrow & l+1 & l+1 & \downarrow & l & 0 & \downarrow & 0 & l & \downarrow & l \\ & p & & -p & & -p-1 & & -p-1 & & p+1 & & p & & \beta \end{array}$$

これは $S_{i_m} = S_p$ を表すものに一致する。

□

T の計算例を次の章に載せて本稿を終える。

2.3 Examples

\mathfrak{g}_n オートマトンを \mathcal{T} を使って求める例を 3 つ示す。クリスタルの同型を使って定義された T の計算結果も一緒に載せておく。

Example 4. $\mathfrak{g}_n = D_4^{(1)}$.

$$\begin{array}{c}
 K_{-2} \left(\begin{array}{cccccccccccc}
 & -3 & & -2 & & 1 & & -2 & & 2 & & 3 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 0 & \downarrow & \rightarrow & 0 & \downarrow & \rightarrow & 1 & \downarrow & \rightarrow & 0 & \downarrow & \rightarrow & 1 & \downarrow & \rightarrow & 0 & \downarrow & \rightarrow & 0 \\
 & -3 & & 1 & & -2 & & 1 & & -1 & & 3 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 0 & \downarrow & \rightarrow & 1 & \downarrow & \rightarrow & 0 & \downarrow & \rightarrow & 0 & \downarrow & \rightarrow & 1 & \downarrow & \rightarrow & 0 & \downarrow & \rightarrow & 0 \\
 & 1 & & -3 & & -2 & & 1 & & 3 & & -1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 0 & \downarrow & \rightarrow & 0 & \downarrow & \rightarrow & 0 & \downarrow & \rightarrow & 0 & \downarrow & \rightarrow & 1 & \downarrow & \rightarrow & 0 & \downarrow & \rightarrow & 0 \\
 & 1 & & -3 & & -2 & & 1 & & 3 & & 4 & & -4 & & 1 & & 1 \\
 0 & \downarrow & \rightarrow & 0 & \downarrow & \rightarrow & 0 & \downarrow & \rightarrow & 0 & \downarrow & \rightarrow & 0 & \downarrow & \rightarrow & 1 & \downarrow & \rightarrow & 0 \\
 & 1 & & -3 & & -2 & & 1 & & 3 & & 1 & & -1 & & 1 & & 1 \\
 0 & \downarrow & \rightarrow & 0 & \downarrow & \rightarrow & 0 & \downarrow & \rightarrow & 0 & \downarrow & \rightarrow & 1 & \downarrow & \rightarrow & 0 & \downarrow & \rightarrow & 0 \\
 & 1 & & -3 & & -2 & & 1 & & 1 & & 3 & & -3 & & 3 & & 1 \\
 0 & \downarrow & \rightarrow & 0 & \downarrow & \rightarrow & 0 & \downarrow & \rightarrow & 0 & \downarrow & \rightarrow & 1 & \downarrow & \rightarrow & 0 & \downarrow & \rightarrow & 1 \\
 & 1 & & -3 & & -2 & & 1 & & 1 & & 3 & & -3 & & 3 & & 1 \\
 0 & \downarrow & \rightarrow & 0 & \downarrow & \rightarrow & 0 & \downarrow & \rightarrow & 0 & \downarrow & \rightarrow & 0 & \downarrow & \rightarrow & 0 & \downarrow & \rightarrow & 0 \\
 & 1 & & -3 & & -2 & & 1 & & 1 & & 3 & & -3 & & 3 & & 1
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

より、

$$\mathcal{T}((-3, -2, 1, -2, 2, 3, 1, 1, 1, 1, \dots)) = (1, -3, -2, 1, 1, 3, -3, 3, 1, 1, \dots).$$

一方、

$$\begin{aligned}
 & T(\overline{3} \otimes \overline{2} \otimes \overline{1} \otimes \overline{2} \otimes \overline{2} \otimes \overline{3} \otimes \overline{1} \otimes \overline{1} \otimes \overline{1} \otimes \overline{1} \otimes \dots) \\
 &= \overline{1} \otimes \overline{3} \otimes \overline{2} \otimes \overline{1} \otimes \overline{1} \otimes \overline{3} \otimes \overline{3} \otimes \overline{3} \otimes \overline{1} \otimes \overline{1} \otimes \dots
 \end{aligned}$$

A B_1 のクリスタルグラフ

各代数 \mathfrak{g}_n に対して、 $U'_q(\mathfrak{g}_n)$ クリスタル B_1 のクリスタルグラフを示す。クリスタル B のクリスタルグラフとは B の元を描いたグラフであって、 $\tilde{f}_a b = b'$ の関係にあるすべての $b, b' \in B$ を $b \xrightarrow{a} b'$ と矢印で結んだものである。これで B のクリスタル構造が完全に決まる。たとえば、下の表にある $U'_q(A_n^{(1)})$ クリスタル B_1 のクリスタルグラフより次がわかる：

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(\boxed{1}) &= \boxed{2}, & \tilde{f}_a(\boxed{1}) &= 0 \quad (a \neq 1), \\ &\dots\dots\dots \\ \tilde{f}_n(\boxed{n}) &= \boxed{n+1}, & \tilde{f}_a(\boxed{n}) &= 0 \quad (a \neq n), \\ \tilde{f}_0(\boxed{n+1}) &= \boxed{1}, & \tilde{f}_a(\boxed{n+1}) &= 0 \quad (a \neq 0). \end{aligned}$$

\mathfrak{g}_n	B_1 のクリスタルグラフ
$A_n^{(1)}$ ($n \geq 1$)	
$A_{2n-1}^{(2)}$ ($n \geq 3$)	
$A_{2n}^{(2)}$ ($n \geq 2$)	
$B_n^{(1)}$ ($n \geq 3$)	
$C_n^{(1)}$ ($n \geq 2$)	
$D_n^{(1)}$ ($n \geq 4$)	
$D_{n+1}^{(2)}$ ($n \geq 2$)	

References

- [FOY] K. Fukuda, M. Okado, Y. Yamada, *Energy functions in box ball systems*, Int. J. Mod. Phys. A **15** (2000) 1379–1392.
- [HHIKTT] G. Hatayama, K. Hikami, R. Inoue, A. Kuniba, T. Takagi and T. Tokihiro, *The $A_M^{(1)}$ Automata related to crystals of symmetric tensors*, to appear in Journal of Mathematical Physics **42** No.1 (2001), preprint math.QA/9912209.
- [HKOT1] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado and T. Takagi, *Combinatorial R matrices for a family of crystals: $C_n^{(1)}$ and $A_{2n-1}^{(2)}$ cases*, Progress in Mathematics Vol. 191 Physical Combinatorics (2000), Birkhäuser Boston, 105–139.
- [HKOT2] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado and T. Takagi, *Combinatorial R matrices for a family of crystals : $B_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$, $A_{2n}^{(2)}$ and $D_{n+1}^{(2)}$ cases*, preprint math.QA/0012247.
- [HKOTY] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Y. Yamada, "Scattering rules in soliton cellular automata associated with crystal bases" , preprint math.QA/0007175.
- [HKT1] G. Hatayama, A. Kuniba, and T. Takagi, *Soliton cellular automata associated with crystal bases*, Nucl. Phys. B**577**[PM] (2000) 619–645.
- [HKT2] G. Hatayama, A. Kuniba, and T. Takagi, *Factorization of combinatorial R matrices and associated cellular automata*, preprint math.QA/0003161, to appear in J. Stat. Phys. **102** (2001).
- [Kac] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, 3rd ed. Cambridge Univ. Press, Cambridge (1990).
- [T] D. Takahashi, *On some soliton systems defined by using boxes and balls*, Proceedings of the International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications (NOLTA '93), (1993) 555–558.
- [TS] D. Takahashi and J. Satsuma, *A soliton cellular automaton*, J. Phys. Soc. Jpn. **59** (1990) 3514–3519.