

# あるパターン方程式のダイナミクス Dynamics of Pattern Formation Equations

志田 篤彦, 高橋 大輔

Atsuhiko Shida, Daisuke Takahashi

早稲田大学理工学部数理科学科

Department of Mathematical Sciences,

School of Science and Engineering, Waseda University

## 0 序

現在, 可積分系の研究においては「超離散化」の手法を用いて連続系から超離散系への代数構造の繋がりが数多く研究され, 他の分野への発展もめざましいものがある [1, 2]。今回の研究は, この超離散化を反応拡散方程式, 事に興奮系に応用する事を目的としたものである。可積分系における議論では連続系がまずあって, そこから離散系, 超離散系を考えていくが [2], ここでは逆に超離散系から連続系へ繋がりを調べていく形で進めていく。

まず, 可積分系における「超離散化」の手法を, KdV 方程式を例として説明する。

KdV 方程式

$$u_t + 12uu_x + u_{xxx} = 0$$

↑

$$u_j^t = 1 + 2\varepsilon^2 u(\varepsilon(j - 2\delta t), \varepsilon^3 \delta t / 3)$$
$$\varepsilon, \delta \rightarrow 0$$

離散 Lotka–Volterra (LV) 方程式

$$\frac{u_j^{t+1} - u_j^t}{\delta} = u_j^t u_{j-1}^t - u_j^{t+1} u_{j+1}^{t+1}$$

↓

$$u_j^t = \exp(U_j^t / \varepsilon), \delta = \exp(-1 / \varepsilon)$$
$$\varepsilon \rightarrow +0$$

超離散 LV 方程式 (max-plus 方程式)

$$U_j^{t+1} - U_j^t = \max(0, U_{j-1}^t - 1) - \max(0, U_{j+1}^{t+1} - 1)$$

連続系での KdV 方程式が, 差分 LV 方程式を通じて超離散 LV 方程式と緊密な繋がりを持っていることがわかる。さらに, KdV 方程式と超離散 LV 方程式の特殊解同士を, 上の超離散極限で関係付けることが可能であることも知られている [3]。

これと同様の事を反応拡散方程式に対して考えることが, 本研究の目的である。ただし現在のところ, 上のように連続から離散, 超離散のルートをたどることに成功していない。それ故, ここでは超離散系から逆に離散, 連続へ移行していくルートを想定する。実のところ, これもまだ成功には至っていないが, 最初のたたき台として時間発展により連続系と同様な挙動を示す max-plus 方程式を提案し, それについて議論したい。

一般的な反応拡散方程式は，

$$\begin{aligned}\tau \frac{du}{dt} &= D_u \Delta u + f(u, v), \\ \frac{dv}{dt} &= D_v \Delta v + g(u, v)\end{aligned}$$

のように，拡散項  $D_u \Delta u$ ,  $D_v \Delta v$  と反応項  $f(u, v)$ ,  $g(u, v)$  を持つ， $u, v$  の 2 成分連立偏微分方程式の形をしている [4, 5]。それに対し，我々が今回提示する max-plus 方程式のファミリーは

$$\begin{aligned}u^{t+1} &= \begin{cases} \max(u^t \text{ およびその近傍}) \\ \max(u^t \text{ およびその近傍}, v^t) \end{cases} - \begin{cases} v^t \\ v^t + u^t \end{cases}, \\ v^{t+1} &= u^t\end{aligned}\quad (1)$$

という形をしている。たたき台としてとにかく単純であることに心がけた。そして，max の項による拡散効果と反応効果を，最低限の道具で表現するようにした。以下ではまず 1 次元，2 次元の方程式について，連続系と対比させながら解の挙動を観察する。

## 1 1次元の場合

### 1.1 対消滅 (Pair annihilation)

まず，対消滅 (Pair annihilation) を起こすパターンを比較する。連続系での反応拡散方程式として，次の (2) を考える [5]。

$$\begin{cases} \tau u_t = D_u \Delta u + f(u) - v \\ v_t = D_v \Delta v + u \end{cases}\quad (2)$$

$$f(u) = \frac{1}{2} [\tanh((u - a)/\delta) + \tanh(a/\delta)] - u$$

$$\tau = 0.30, \quad D_u = 1.0, \quad D_v = 10.0$$

$$a = 0.1, \quad \delta = 0.05$$

この方程式 (2) では，図 1 のように時間発展により波の対消滅が起こる。

図 1: Pair annihilation

これに対し，(1) のクラスの方程式のうち次式のものを考えてみよう。(以後では，この式を A 型と呼ぶことにする。)

$$\begin{cases} u_i^{t+1} = \max(u_{i+1}^t, u_i^t, u_{i-1}^t, v_i^t) - v_i^t \\ v_i^{t+1} = u_i^t \end{cases}\quad (3)$$

適当に初期値を選ぶと，この系でも連続系と同様の対消滅現象を再現できる (図 2)。

図 2: Ultradiscrete Pair annihilation

## 1.2 ソリトンの相互作用 (Soliton-like interaction)

次に，孤立波のソリトンのすり抜け現象を比較する。連続系での反応拡散方程式としては，先ほどの (2) の  $a$  を  $a = 0.097$  としたものをを用いると，図 3 のように波のすり抜け現象が見られる。

図 3: Soliton-like interaction

これに対し，(1) のクラスのうちで次式の形のものを考えると，ソリトンの振る舞いが見られる。(以下では，次式のタイプを B 型と呼ぶ。)

$$\begin{cases} u_i^{t+1} = \max(u_{i+1}^t, u_i^t, u_{i-1}^t) - v_i^t \\ v_i^{t+1} = u_i^t \end{cases} \quad (4)$$

適当に初期値を選ぶと，この系でも連続系と同様の波のすり抜け現象を再現できる (図 4)。

図 4: Ultradiscrete soliton-like interaction

## 1.3 自己複製現象 (Reproduction)

次に，孤立波の自己複製現象 (reproduction) を考えよう。連続系での反応拡散方程式としては，先ほどの (2) の  $a$  を  $a = 0.0966$  としたものをを用いると，図 5 のように自己複製現象が見られる。

図 5: Reproduction

これに対し, (1) のクラスのうちから次式のもの考えると, この現象を再現することができる。  
(以後次式のタイプを B 型と呼ぶ)

$$\begin{cases} u_i^{t+1} = \max(u_{i+1}^t, u_i^t, u_{i-1}^t) - u_i^t - v_i^t \\ v_i^{t+1} = u_i^t \end{cases} \quad (5)$$

適当に初期値を選ぶと, この系でも連続系と同様の自己複製現象を再現できる (図 6)。

図 6: Ultradiscrete reproduction

#### 1.4 自己増殖現象 (Pulse generator)

次に, 自己増殖現象を考察する。連続系での反応拡散方程式としては, 先ほどの (2) の  $a$  を  $a = 0.096$  としたものを用いると, 図 7 のように自己増殖現象が見られる。

図 7: Pulse generator

適当に初期値を選ぶと, max-plus 系でも連続系と同様の自己増殖現象を再現できる (図 8)。

図 8: Ultradiscrete pulse generator

以上 1.1 ~ 1.4 節で見てきたように，興奮系で見られる主な現象を (1) の形の式で再現しうることが解った。

## 2 2次元の場合

### 2.1 BZ パターン

次に 2 次元での現象を考えよう。2 次元パターンの現れる非平衡開放系の例として，有名な Belousov-Zhabotinsky (BZ) 反応が挙げられる。この反応を記述する反応拡散方程式の一つに，次のものがある (オレゴネータ [4])。

$$\begin{cases} \tau u_t = D_u \Delta u + f(u, v) - v \\ v_t = D_v \Delta v + u - v \end{cases} \quad (6)$$

$$f(u, v) = u(1 - u) - \frac{pv(u - q)}{u + q}$$

$$D_u = 0.00000060, D_v = 0.6D_u$$

$$p = 1.2, q = 0.00080, \tau = 0.040$$

この式をに基いて数値計算を行うと，図 9・10 のように実験的に観測される「ターゲットパターン」「スパイラルパターン」といった現象を再現していることが解る。

これに対して A 型の (7) を特定の初期値を選んで数値計算すると図 11~14 のようにターゲットパターンとスパイラルパターンを再現することができる。

$$\begin{cases} u_{i,j}^{t+1} = \max(u_{i+1,j}^t, u_{i,j+1}^t, u_{i,j}^t, u_{i-1,j}^t, u_{i,j-1}^t, v_{i,j}^t) - v_{i,j}^t \\ v_{i,j}^{t+1} = u_{i,j}^t \end{cases} \quad (7)$$

なお，再現する現象を変える際，連続の反応拡散方程式で定数  $a$  を変えることに対応して，max-plus 方程式の方では  $u$  や  $v$  の項を抜いたり入れたりした。この抜いたり入れたりする操作は定数を変えるのとは，かなり違うのではないかと思われるかもしれないが，0 あるいは 1 を取る定数がそれらの項の前についていると思えば，定数の値を変えるだけで再現できるのではないかと考えられる。

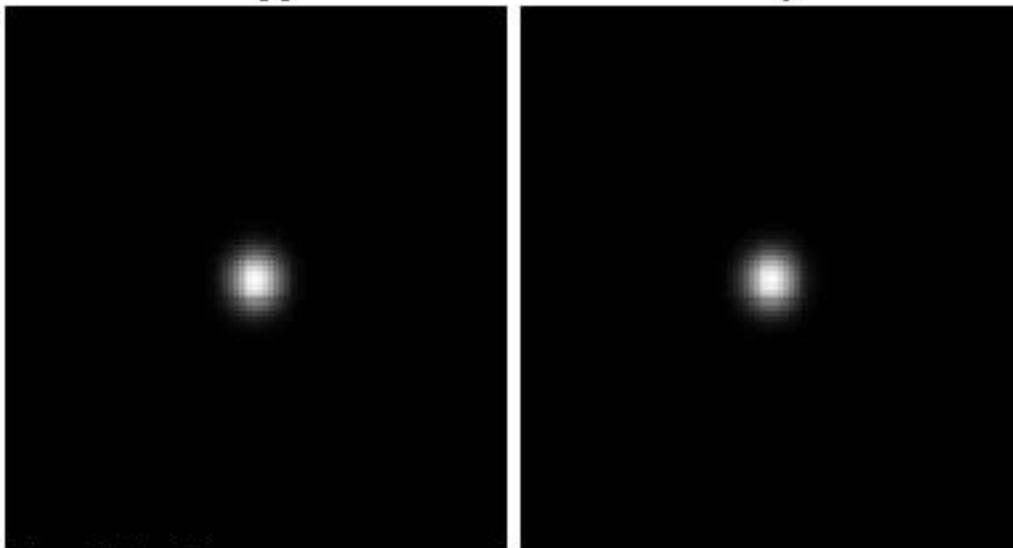
### 2.2 max-plus 方程式におけるコアパターンの存在

偏微分方程式系としての反応拡散方程式の解のふるまいは，多くの研究者によって調べられている [4]。そこで我々も max-plus 方程式でも同様の解析がどれだけできるのだろうかを考たくなるわけだが，連続系との対応はひとまず脇において，max-plus 方程式固有の構造を解析してみた。

$t = 0.0$

$u$

$v$



$t = 16.0$

$u$

$v$

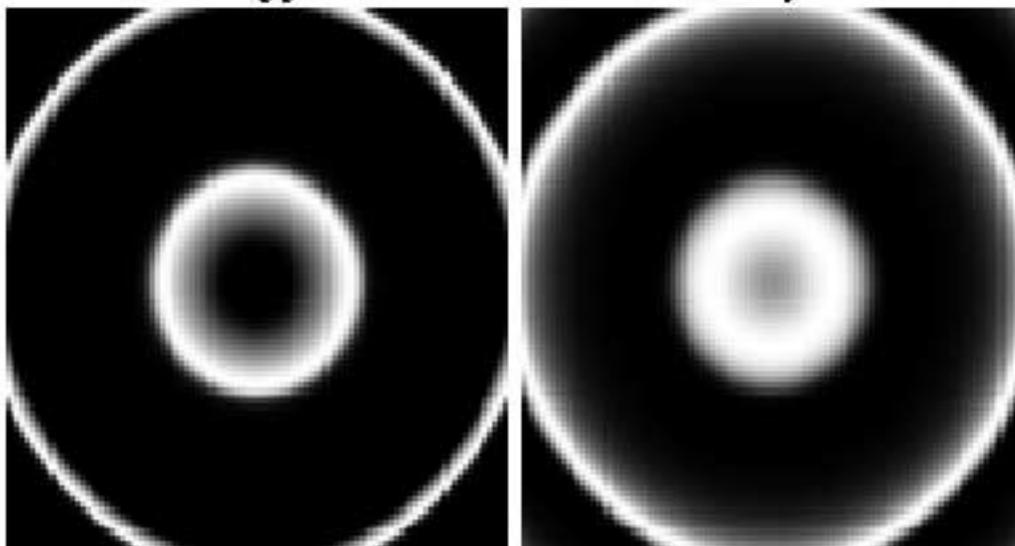


図 9: ターゲットパターン

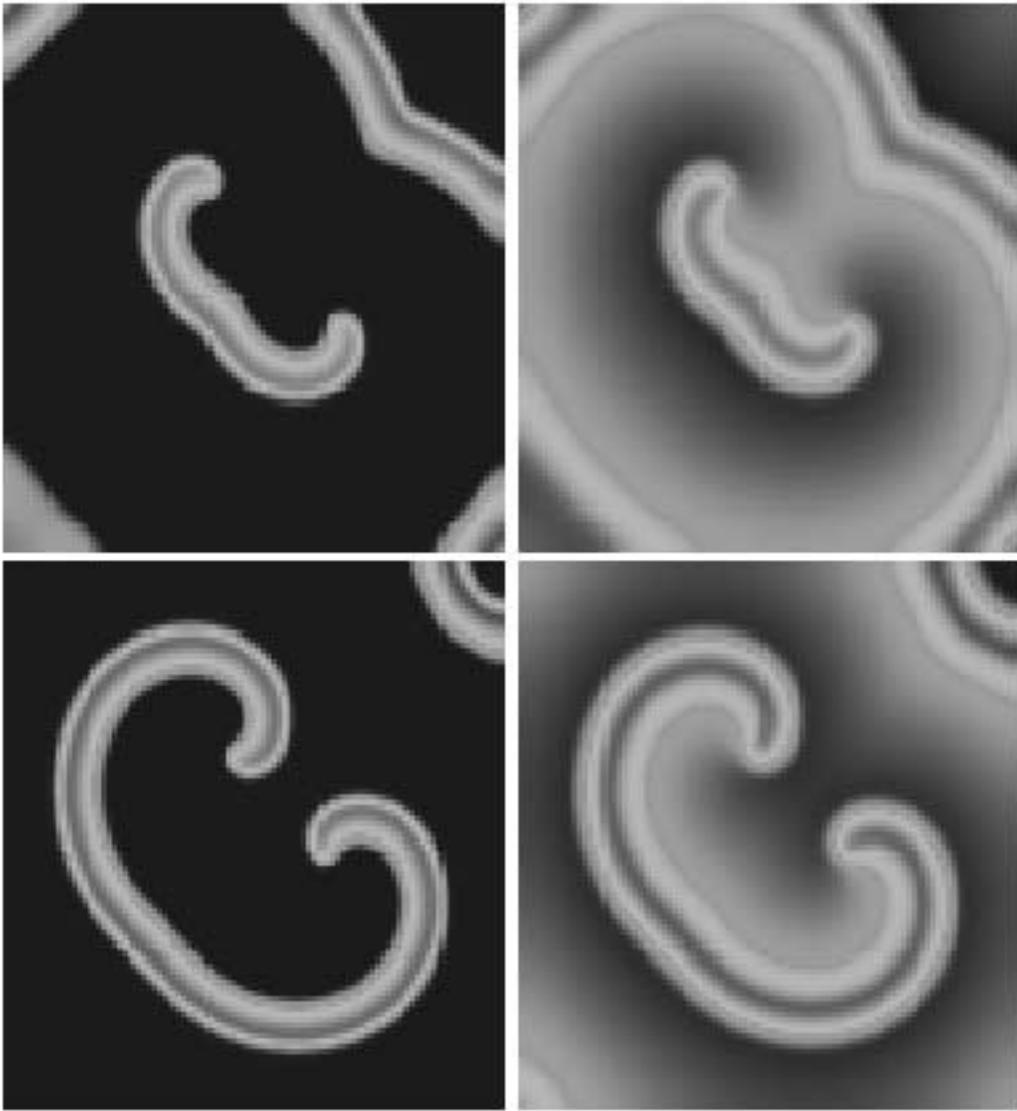


図 10: スパイラルパターン

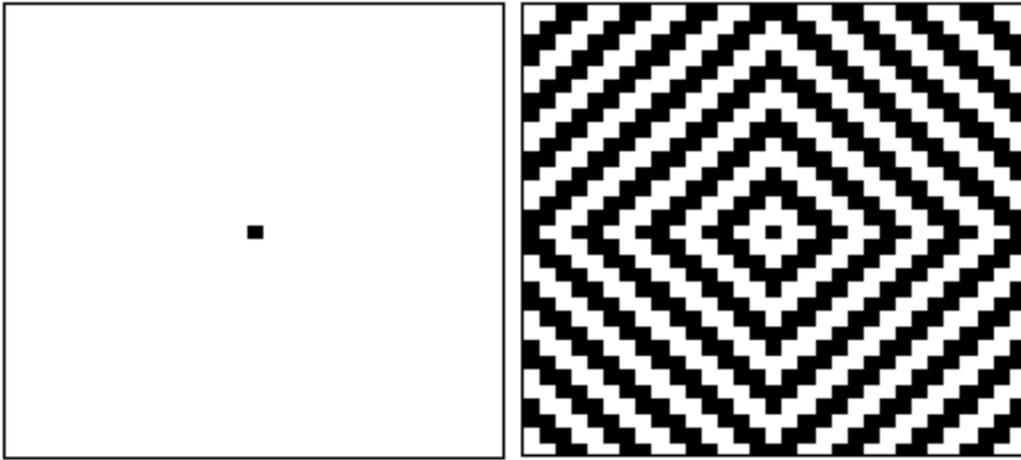


図 11: ターゲットパターン

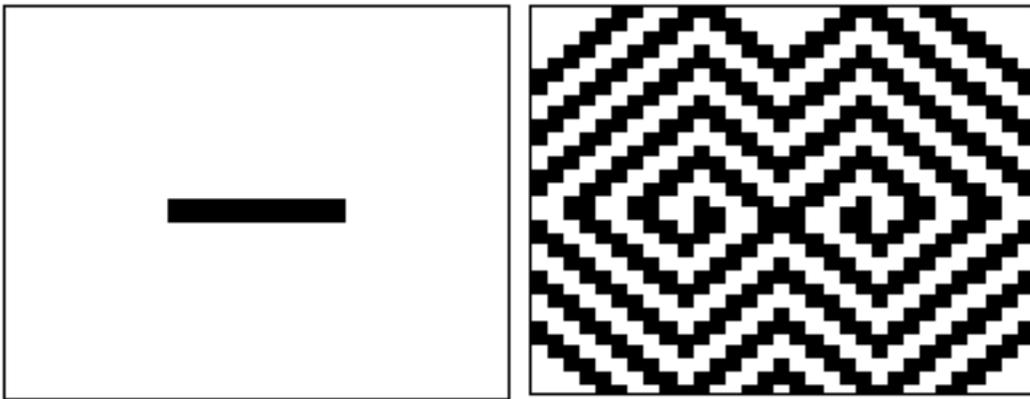


図 12: スパイラルパターン

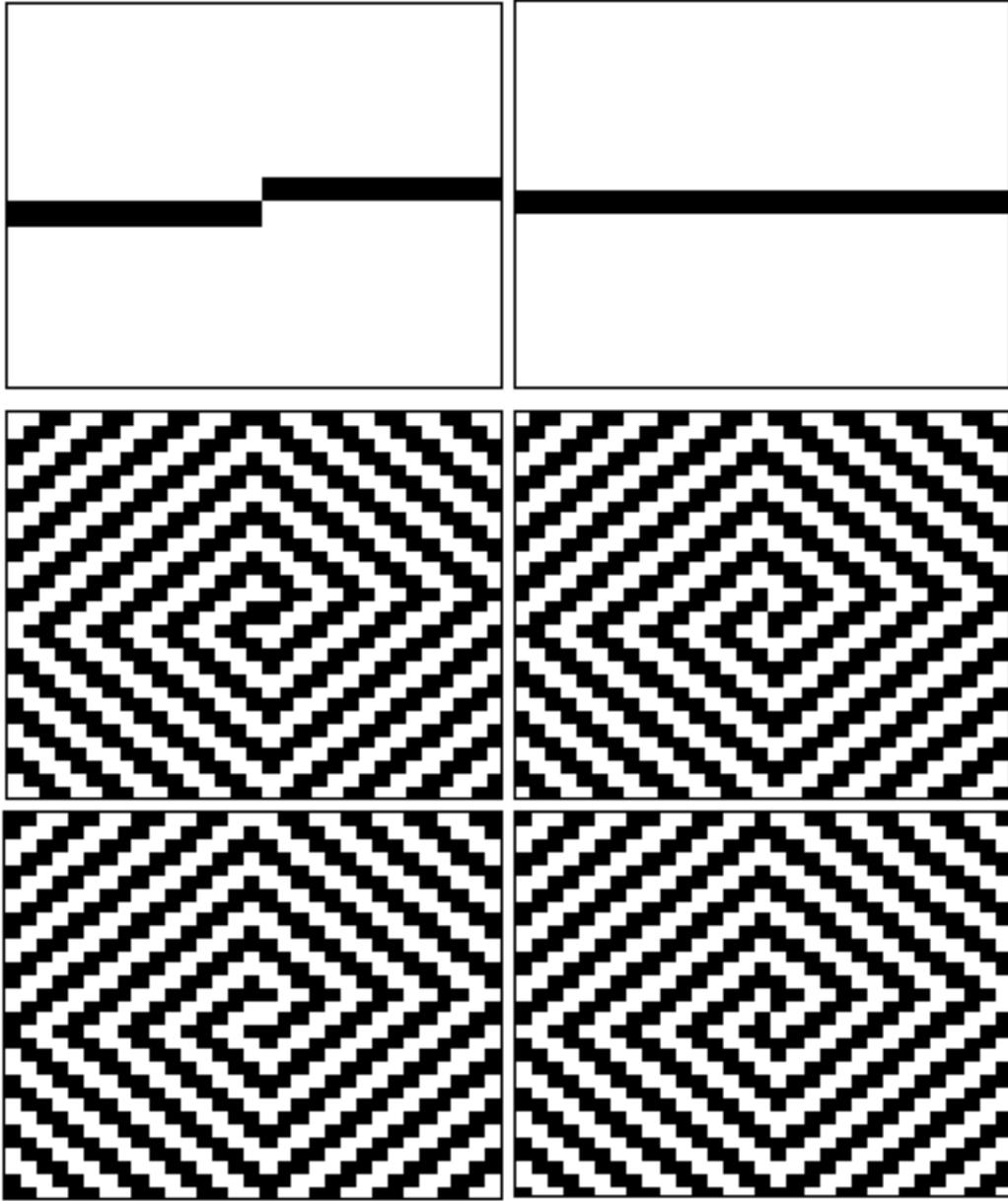


図 13: キッシングパルス

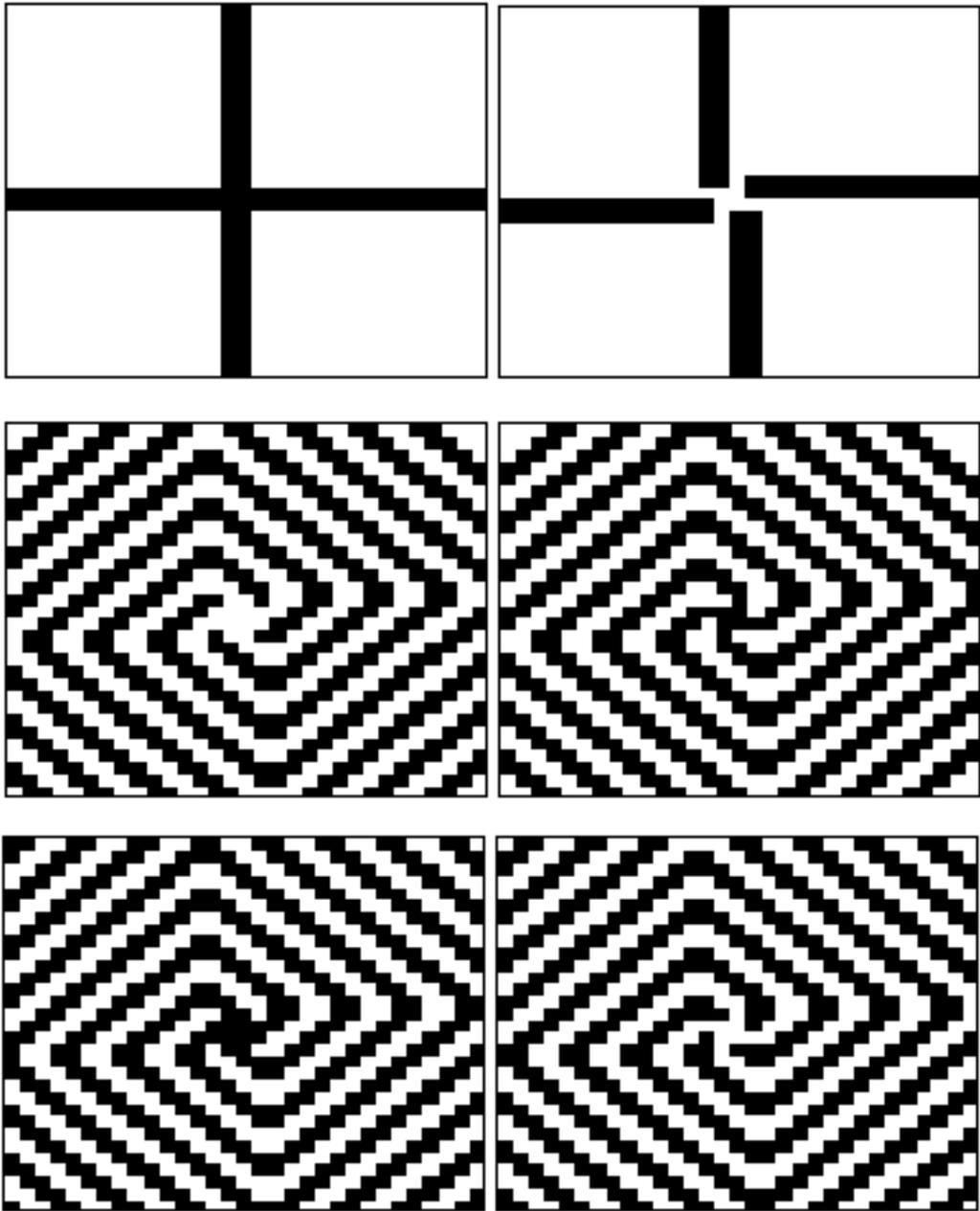


図 14: キッシングパルス

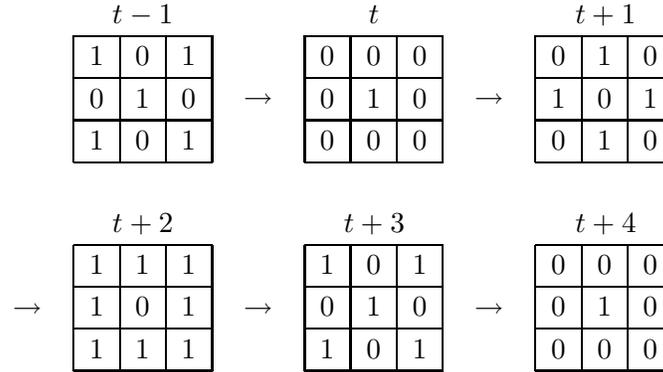
最初は、なぜターゲット、スパイラルパターンが安定なのかということについて考えてみよう。以下に述べるように、2次元の方程式(7)に対するターゲット、スパイラルパターンの安定性を簡単に示すことができる。まず、話をわかりやすくするために、 $u$  と  $v$  の二本の式(7)を次のように  $u$  一本で書き直す。

$$u_{i,j}^{t+1} = \max(u_{i+1,j}^t, u_{i,j+1}^t, u_{i,j}^t, u_{i-1,j}^t, u_{i,j-1}^t, u_{i,j}^{t-1}) - u_{i,j}^{t-1} \quad (8)$$

するとこの式(8)は  $u$  に関して時間2階の差分方程式であるから、2時刻の  $u$  の初期値を用意すれば時間発展を追うことができる。このときに、以下に述べるような意味で「コアパターン」が存在する。ここで「コアパターン」とは、周囲の値に影響されずに独自に時間発展する局所的なパターンのことである。

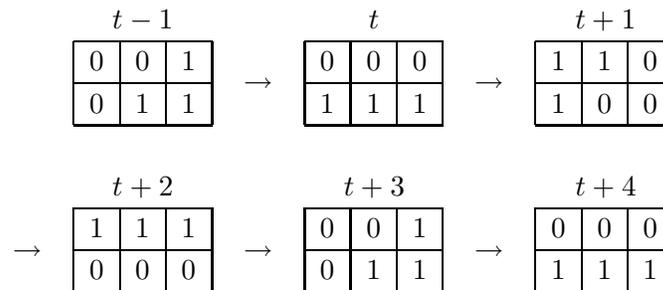
### 2.2.1 パルスジェネレータのコア (3×3 lattice)

まずはパルスジェネレータのコアである。初期の2時刻で以下のように3×3の領域(コア領域)に1と0を配置し、それ以外の領域では0か1だけの値を任意にばらまいておくとする。すると、方程式からただちに、周囲の値に無関係にコア領域がこのように時間発展することを示す事ができる。つまりこの領域は永続する4周期パターンになっている。これとターゲットパターンの中心部が一致している。



### 2.2.2 スパイラルパターンのコア (3×2 lattice)

次にスパイラルパターンのコアについて説明する。初期の2時刻で以下のように3×2のコア領域に1と0を配置する。すると、方程式からただちに、周囲の値に無関係にその領域がこのように時間発展することを示すことができる。つまりターゲットパターン同様、この領域は永続する4周期パターンになっている。これもスパイラルパターンの中心部と一致している。



以上のようにして、ターゲット、スパイラルパターンのコアが一度形成されてしまうと、周囲がどうであれターゲット、スパイラルパターンを生み出し続けるため、それらは安定であることが導かれる。

### 2.3 2次元 max-plus 方程式の1次元へのリダクション

前節のようなターゲットパターン・スパイラルパターンを理解する際に、連続系ならば極座標で考えるのが自然であろう。そこで、max-plus 方程式に対しても極座標のような特別な座標を導入してみよう。まずはターゲットパターンの場合を考える。方程式はB型の(9)を使う。

$$\begin{cases} u_{i,j}^{t+1} = \max(u_{i+1,j}^t, u_{i,j+1}^t, u_{i,j}^t, u_{i-1,j}^t, u_{i,j-1}^t) - u_{i,j}^t - v_{i,j}^t \\ v_{i,j}^{t+1} = u_{i,j}^t \end{cases} \quad (9)$$

ここで空間格子の図15を考える。そして、図のように中心部が同じ正方形の曲線の集合を考える。そして、初期値について、それぞれの曲線に属する点においては $u, v$ の値が等しいと仮定する。すると、方程式の対称性から任意の時刻でやはりそれぞれの曲線で $u, v$ の値が等しいことをすぐに示される。また、このときに $n$ 番目の曲線上の $u$ の値を $f_n^t$ とすると、元の式から $f$ に関する1次元方程式(10)が導かれる。これは $n$ について半無限格子の方程式である。

$$f_n^{t+1} = \begin{cases} \max(f_{n-1}^t, f_n^t, f_{n+1}^t) - f_n^t - f_n^{t-1} & \text{if } n > 0 \\ \max(f_0^t, f_1^t) - f_0^t - f_0^{t-1} & \text{if } n = 0 \end{cases} \quad (10)$$

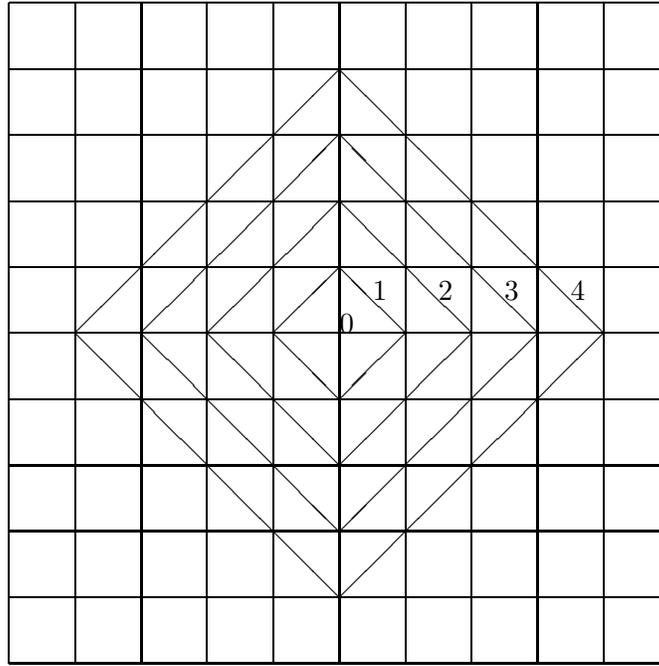


図 15: target pattern

次はスパイラルパターンについてであるが、前と同じ方程式(9)を用いる。今度は図16のようなスパイラルラインを導入し、各スパイラルラインで $u, v$ の値が等しいと仮定すると、 $f$ に関して次の方程式が導かれる。

$$f_n^{t+1} = \max(f_{n-1}^t, f_n^t, f_{n+1}^t) - f_n^t - f_n^{t-1} \quad (11)$$

これも元の方程式系からすぐに言えることで、2次元から1次元へのリダクションになっている。方程式(11)は $n$ に関して周期4の周期解を持つが、これがスパイラルパターンに対応している。現在、このような座標系を連続化の際に利用できるかを試みている。

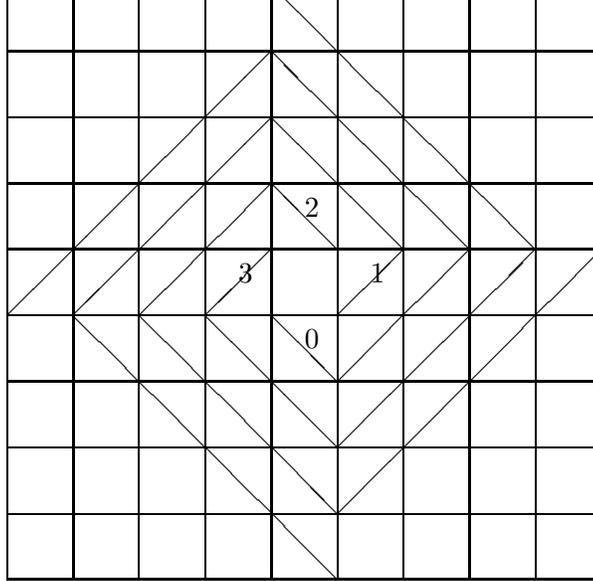


図 16: spiral pattern

### 3 1次元 max-plus 方程式の逆超離散化

次に、「逆超離散化」[6]を考える。「逆超離散化」とは冒頭で述べた超離散化の逆操作であるが、一意的ではないことを注意しておく。逆超離散化の前後で、何らかの意味で解が同様の挙動を示すように、うまく逆超離散化を行いたいわけである。

まず、1次元のB型方程式を $u$ 一本に落とした式(12)を考える。

$$u_i^{t+1} = \max(u_{i+1}^t, u_i^t, u_{i-1}^t) - u_i^t - u_i^{t-1} \quad (12)$$

進行波解として $u_i^t = f_{i \pm t}$ を仮定すると、次式のように書き直すことができる。

$$f_{i+1} + f_i + f_{i-1} = \max(f_{i+1}, f_i, f_{i-1}) \quad (13)$$

ここで、元々の超離散化の操作 $F_i = e^{\frac{f_i}{\varepsilon}}$ ,  $\varepsilon \rightarrow +0$  [3]を念頭において逆超離散化を行うと、次式が得られる。

$$F_{i+1}F_iF_{i-1} = F_{i+1} + F_i + F_{i-1} \quad (14)$$

さらに $F_i = \tan \theta_i$ と置くことによって、(15)が得られる。

$$\theta_{i+1} + \theta_i + \theta_{i-1} = 0 \quad (15)$$

以上の3つの式には、(15)で $\theta_i = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \dots$ という3周期解が、(14)では $F_i = 1, \infty, 1, 1, \infty, \dots$ となり、(13)で $f_i = 0, 1, 0, 0, 1, \dots$ となる解がある。このことから、特解として対応する3周期解が離散系、超離散系で得られる。

実は“exact WKB”の文脈でも、(14)と全く同じ形の方程式が現れる(文献[7](40)式、鈴木淳司氏による指摘)。この一致が単なる偶然であるのか、それともより深い数理的構造の反映であるのかは、残念ながら現時点では明らかではない。

## 4 最後に

本研究では、連続系での反応拡散方程式と定性的なふるまいが似ている max-plus 方程式を提案した。ここで扱った max-plus 方程式は非常に簡単な形をしているので、解のふるまいをある程度厳密に議論することができた。逆にこれらのことから考えると、元の反応拡散方程式の中には非常にきれいな構造を持ったものがあるのではないかという期待が広がる。

また、疑問点としては、

- 解のレベルまで踏み込んだ厳密なつながりがないのか？
- 超離散化はそのつながりでちゃんと機能するのか？
- パターン形成の根拠となる代数構造とは何か？

などが挙げられる。

## 謝辞

研究会の際に、方程式 (13) が文献 [7] にも現れることをご指摘いただいた鈴木淳司先生に感謝します。

## 参考文献

- [1] 数理科学, 特集「超離散」, 1999年9月号
- [2] 高橋大輔, *ながれ* **19-3** (2000)
- [3] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 3241
- [4] 西浦廉政, 「非線形問題 1」, 岩波講座 現代数学の展開 **7** (1999)
- [5] 太田隆夫, 「非平衡系の物理学」, 裳華房 (2000)
- [6] T. Tokihiro, A. Nagai and J. Satuma, *Inv. Prob.* **15** (1999) 1639
- [7] A. Voros, *J. Phys.* **A32** (1999) 1301